

Dream big, work hard, make it happen.



EXERCICE 1

(5 points) Les deux parties 1 et 2 sont indépendantes

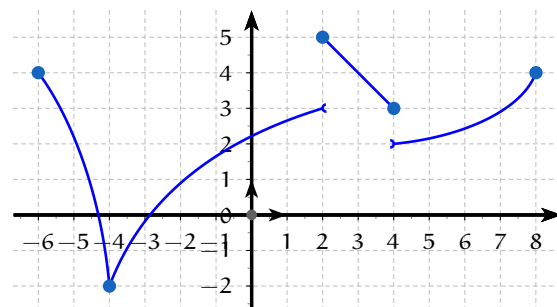
1 Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse

- a A, B et C trois points distincts du plan $\|\vec{AB} + \vec{AC}\|^2 = (AB+AC)^2$ si et seulement si $A \in (BC) \setminus [BC]$.
- b Si on a $|f|$ est une fonction continue en a alors f est une fonction continue en a.
- c Si f est une fonction continue et impaire sur $[-3,3]$ tel que $f(1) = -1$ et $f(2) = 1$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins trois solutions dans $[-3,3]$.

2 On a représenté ci-contre une fonction f définie sur $[-6,8]$.

Déterminer graphiquement :

- a Les intervalles sur lesquels f est continue.
- b Les images des intervalles $[-4,2]$ et $[4,8]$
- c Donner un maximum et un minimum de f s'ils existent.
- d Résoudre graphiquement les équations :
 $E(f(x)) = 4$ et $(f(E(x)))^2 - 3f(E(x)) - 10 = 0$.

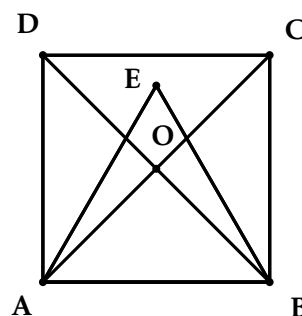


EXERCICE 2

(7 points)

Soit ABCD un carré de centre O et de côté 1, on construit à l'intérieur du carré un triangle équilatéral ABE.

- 1
 - a Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AE}$ et $\vec{AD} \cdot \vec{AE}$.
 - b En déduire la valeur de $\vec{AC} \cdot \vec{AE}$.
 - c Montrer alors que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ et que $OE^2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- 2
 - a Montrer que pour tout point M du plan : $\vec{MA} \cdot \vec{MC} = MO^2 - \frac{1}{2}$
 - b Déterminer alors l'ensemble $E_1 = \left\{ M \in P / \vec{MA} \cdot \vec{MC} = \frac{1}{2} \right\}$
- 3 Soit $E_2 = \left\{ M \in P / 4\vec{MB} \cdot \vec{MC} + 2MO^2 = 1 \right\}$.
 On désigne par G le barycentre des points pondérés (A,1) et (B,2).
 - a Montrer que pour tout point M du plan on a : $4\vec{MB} \cdot \vec{MC} + 2MO^2 = 6\vec{MC} \cdot \vec{MG} + 1$.
 - b En déduire l'ensemble E_2 .
- 4 Soit $E_3 = \left\{ M \in P / MA^2 - MO^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$. On désigne par F le milieu du segment [AO].
 - a Vérifier que le point E appartient à l'ensemble E_3 .
 - b Déterminer alors l'ensemble E_3 .



**EXERCICE 3** (8 points)

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$.

- 1
 - a Vérifier que l'ensemble de définition de f est $D_f = [-3, +\infty[\setminus \{1\}$.
 - b Étudier la continuité de f sur son ensemble de définition.
 - c Montrer que f est prolongeable par continuité en 1 et déterminer son prolongement F .
 - d Montrer que f est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$.
- 2
 - a Montrer que l'équation $f(x) = x - 2$ admet dans $]2, 3[$ une unique solution α .
 - b Vérifier que $\sqrt{\alpha+3} = \frac{-2\alpha+5}{\alpha-2}$
 - c Montrer que $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{(\alpha-2)\sqrt{x+3}+2\alpha-5}{(\alpha-2)(x-\alpha)} = \frac{2-\alpha}{2(2\alpha-5)}$.
- 3 Dans la suite, on désigne par $E(x)$ la partie entière de x . On considère la fonction g définie par :
$$\begin{cases} g(x) = \frac{-2x^2 - E(x)}{x+1} & \text{si } x \in [-3, -1[\\ g(x) = \frac{2x^3 - |x| - 1}{x-1} + ax + b & \text{si } x \in [-1, 1[\\ g(x) = F(x) & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}$$
 Où a et b sont deux réels.
 - a Montrer que g est continue en -1 si et seulement si $a - b = -2$
 - b Déterminer la limite de g à gauche en 1 en fonction de a et b .
 - c Déterminer alors a et b pour que g soit continue en -1 et en 1.
 - d Pour les valeurs de a et b trouvées, déterminer les intervalles sur les quels g est continue.

BON TRAVAIL