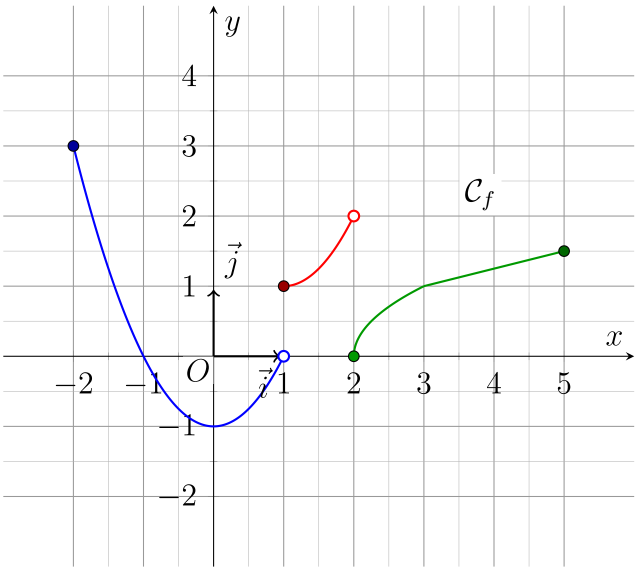
Classe : 3^e Maths Durée : 2 h Date : 05/11/2025	**DEVOIR DE CONTRÔLE N°1** **MATHÉMATIQUES**	**LYCÉE PILOTE DE L'ARIANA**

EXERCICE 1 : (6 points)

On a tracé, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative d'une fonction f définie sur $[-2, 5]$.



1. À l'aide du graphique, déterminer :
   (a) Les intervalles sur lesquels f est continue.
   (b) $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)$.
   (c) Les ensembles $f([-2;1])$, $f([0,2])$ et $f([0,5])$.
2. Résoudre graphiquement, dans $[3,5[$, l'équation $E(2f(x)) = f(x) + 1$.
3. Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{-f(x)}}$. Déterminer le domaine de continuité de g.
4. Soit h la fonction définie par :

$$h(x) = \begin{cases} f(x) + a & \text{si } x < 2, \\ \dfrac{x\sqrt{x+2} - 4}{x - 2} & \text{si } x > 2 \end{cases} \qquad (a \in \mathbb{R}).$$

Déterminer la valeur de a pour que h soit prolongeable par continuité en 2.

EXERCICE 2 : (5 points)

Soit f la fonction définie par :

$$f(x)=\begin{cases} x^2+E\left(\dfrac{1}{1-E(x^2)}\right) & \text{si } x\leq 1,\\ \dfrac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1}+1 & \text{si } 1<x<2,\\ -\dfrac{1}{x^2-3x} & \text{si } x\geq 2.\end{cases}$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Montrer que la restriction de f à $]-\infty,-\sqrt{2}]$ est une parabole que l'on précisera.
3. Montrer que f est prolongeable par continuité en 1.
4. Montrer que l'équation $f(x)=x^2$ admet au moins une solution $\alpha\in]2,3[$.
5. Calculer $\lim\limits_{x\to\alpha^+}\dfrac{E(x)-2}{x-\alpha}$.

EXERCICE 3 : (9 points)

Dans la figure ci-dessous, ADC est un triangle équilatéral et A' est le milieu du segment $[BC]$. On pose $AC=a$, $AB=2a$ et $AE=\dfrac{2}{3}a$, où $a\in\mathbb{R}_+^*$.

1)

a) Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ en fonction de a.

b) En déduire les longueurs BC et AA' en fonction de a.

c) Prouver que $\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{EA}=-\dfrac{a^2}{2}$.

2) Soit N un point de la droite (AC).

a) Montrer que $\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{EN}=-\dfrac{a^2}{2}$.

b) En déduire que $(AC)\perp(AA')$.

3) Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre O circonscrit au triangle ABC. La droite (AA') recoupe $\mathcal{C}$ en F.

a) Montrer que $\overrightarrow{A'A}\cdot\overrightarrow{A'F}=-\dfrac{BC^2}{4}$.

b) En déduire l'ensemble des points M du plan tels que :

$$2\,\overrightarrow{A'M}\cdot\overrightarrow{A'F}=2\,MA'^2-MB^2-MC^2.$$

4) Soit I le milieu de $[DC]$.

a) Montrer que, pour tout point M du plan :

$$MD^2 + MC^2 - 2MA^2 = AD^2 + AC^2 - 4\,\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AI}.$$

b) Déterminer et construire l'ensemble :

$$\mathcal{E} = \left\{ M \in \mathcal{P} \text{ tels que } MD^2 + MC^2 - 2MA^2 = 2(1 + 2\sqrt{3})\,a^2 \right\}.$$