Lycée Pilote Mahdia	**Devoir de contrôle n° 1** Mathématiques	Niveau : 3 ème Maths 1+2
Date : 09 / 11 / 2024	Prof : Meddeb Tarek	Durée : 2 heures

NB *: Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation.*

Exercice n°1 *(4,5 pts)*

Les questions 1), 2), 3) et 4) sont indépendantes.

1) Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+2x+2}$ est bornée sur *IR*.

2) Montrer que la fonction $g : x \mapsto xE(x) - 2E(x)$ est continue sur $[1;3[$.

3) Soit h la fonction définie par : $h(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-x-1}{x-1} & \text{si } x<1 \\ \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1} & \text{si } x>1 \end{cases}$

   $a/$ Déterminer le domaine de définition de h.

   $b/$ La fonction h est-elle prolongeable par continuité en 1 ?

4) Soient A, B et C trois points du plan tels que : $AB = 2AC = 2$ et $\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right\|^2 = 5-2\sqrt{2}$.

   Calculer $\cos\widehat{BAC}$.

Exercice n°2 *(5,5 pts)*

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;0[$ par : $f(x) = \sqrt{4-x} + \dfrac{4}{x}$.

1) $a/$ Montrer que, pour tous réels a et b de $]-\infty;0[$, on a :

$$f(b) - f(a) = (a-b)\left(\frac{1}{\sqrt{4-b}+\sqrt{4-a}} + \frac{4}{ab}\right).$$

   $b/$ Etudier le sens de variation de f sur $]-\infty;0[$.

2) $a/$ Montrer que l'équation : $f(x) = 0$ admet dans $]-2;-1[$ une unique solution α.

   $b/$ Donner un encadrement de α d'amplitude $0,25$.

3) $a/$ Montrer que : $\alpha^2 - 4\alpha = -\dfrac{16}{\alpha}$.

   $b/$ En déduire que, pour tout $x \in]-\infty;0[$, $x^3 - 4x^2 + 16 = (x-\alpha)\left(x^2 + (\alpha-4)x - \dfrac{16}{\alpha}\right)$.

4) Soit g la fonction définie sur $]-\infty;0[$ par : $\begin{cases} g(x) = \dfrac{f(x)}{x-\alpha} & \text{si } x \neq \alpha \\ g(\alpha) = \dfrac{3}{8}\alpha - 1 \end{cases}$

   Montrer que g est continue en α.

Exercice n°3 (6 pts)

Dans la figure de l'annexe :

- ABC un triangle équilatéral tel que $AB = a$, $a > 0$.
- E est le symétrique de A par rapport à B.
- D est le point tel que $ACDE$ est un parallélogramme.
- I et J sont les milieux respectifs des segments $[BC]$ et $[DE]$.

1) $a/$ Exprimer en fonction de a les produits scalaires $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}$.

   $b/$ En déduire que les droites (BC) et (BD) sont perpendiculaires.

2) $a/$ Montrer que : $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AD} = 5a^2$.

   $b/$ Déterminer et construire l'ensemble $\mathscr{C}$ de points M du plan tel que : $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MD} = 5a^2$.

3) $a/$ Montrer que, pour tout point M du plan, on a : $MB^2 - MC^2 = 2\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{IM}$.

   $b/$ Déterminer l'ensemble Δ des points M du plan tels que : $MB^2 - MC^2 = -a^2$.

4) Soit G le point d'intersection des droites (CB) et (AD).

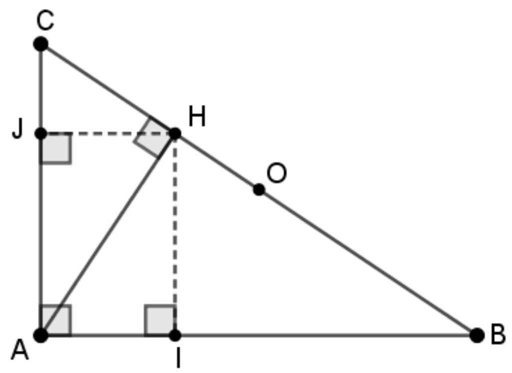
   $a/$ Montrer que G est le barycentre des points pondérés $(B,2)$ et $(C,1)$.

   $b/$ Déterminer et construire l'ensemble Γ des points M du plan tels que : $2MB^2 + MC^2 = 2a^2$.

Exercice n°4 (4 pts)

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

On désigne par H le pied de la hauteur issue de A, I et J sont les projetés orthogonaux de H respectivement sur (AB) et (AC).



1) $a/$ Soit Δ la médiatrice de $[AI]$.

   En considérant la symétrie axiale d'axe Δ, montrer que :

   $$(\widehat{\overrightarrow{IJ};\overrightarrow{AI}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AH}}) + \pi\ [2\pi].$$

   $b/$ En déduire que $(\widehat{\overrightarrow{IJ};\overrightarrow{AI}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}}) - \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

2) Soit O le milieu de $[BC]$.

   $a/$ Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{AJ};\overrightarrow{AO}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}})\ [2\pi]$.

   $b/$ En déduire que les droites (IJ) et (AO) sont perpendiculaires.

> Croyez en vos rêves et ils se réaliseront peut-être. Croyez-en vous et ils se réaliseront sûrement.
> (Martin Luther King)

ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

Devoir de contrôle n° 1 *(09 – 11 – 2024)*

Nom et prénom : ………………………………………….. *Classe : 3 M …*