Devoir de contrôle n 1

Exercice n 1 (3 points)

Pour chaque question, une seule réponse est correcte. Aucune justification n'est demandée.

1. L'équation : $3\sqrt{x+2}-x-1=0$ admet au moins une solution α dans l'intervalle :

   a $[9.10;9.11]$ **b** $[8.10;8.11]$ **c** $[8.89;8.90]$ **d** $[8.90;8.91]$

2. L'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \frac{\sqrt{x-2025}}{E(x)-2025}$ est :

   a $]2025,+\infty[$ **b** $[2025,+\infty[$ **c** $]2026,+\infty[$ **d** $[2026,+\infty[$

3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x^3}{\sqrt{x}-1} =$

   a 3 **b** $-\infty$ **c** 6 **d** -6

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4(\sqrt{x+4}-2)}{(x-4x^2)} =$

   a $+\infty$ **b** 0 **c** $\frac{1}{4}$ **d** 1

Exercice n 2 (3 points)

Soient A, B, C et D des points du plan tels que : $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{43\pi}{3}[2\pi]$ et $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}) \equiv \frac{55\pi}{6}[2\pi]$.

1. Déterminer la mesure principale de $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ et de $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$.
2. Déterminer une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$. Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$?
3. Dans la suite, on prendra : $AB = AC = 2\,\text{cm}$ et $AD = 3\,\text{cm}$. Faire une figure.
4. **a** Construire le point E tel que : $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}) \equiv -\frac{2\pi}{3}[2\pi]$ et $AE = 3\,\text{cm}$.
   b Montrer que les points A, C et E sont alignés.

Exercice n 3 (7 points)

Soit ABC est un triangle équilatéral de côté a ; D est le point tel que $2\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{CB}$; I, J, et K sont les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AD]$, et $[AJ]$.

1. **a** Faire une figure
   b Calculer, en fonction de a, les produits scalaires $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$.
   c En déduire que les droites (AB) et (ID) sont perpendiculaires.
2. **a** Montrer que $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD} = \frac{a^2}{4}$. En déduire BJ.
   b Montrer que $BD = \frac{a\sqrt{7}}{2}$. En déduire $\cos(\widehat{ABD})$.
3. Placer le point E du plan tel que : $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$. Vérifier que E est le barycentre des points pondérés $(A,1)$ et $(B,3)$
4. Soit Γ l'ensemble des points M du plan tels que : $4\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{MD} = 3\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}$.
   a Montrer que Γ est le cercle de diamètre $[AD]$.

b La droite (BD) recoupe le cercle Γ en F. Calculer $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{BD}$. En déduire BF.

5 Soit Δ l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 - MJ^2 = \frac{3}{16}a^2$. Montrer que Δ est la perpendiculaire à la droite (AJ) passant par B.

6 Soit $(\mathscr{E})$ l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2 + 3MB^2 = \dfrac{37}{16}a^2$

a Montrer que, pour tout point M du plan, $MA^2 + 3MB^2 = 4ME^2 + \frac{3}{4}a^2$.

b En déduire l'ensemble $(\mathscr{E})$

Exercice n 4 (7 points)

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}$.

1 **a** Déterminer l'ensemble D_f de définition de f.

b Montrer que f est continue sur D_f.

2 Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{x^2}$ admet dans l'intervalle $[1;2]$ au moins une solution α.
Donner un encadrement de α d'amplitude 0.1

3 **a** Montrer que f est majorée sur $\mathbb{R}_+$ par 1.

b Vérifier que la fonction f est paire.

c En déduire que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

4 Soit g la fonction définie par : $g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{2\sqrt{x^2+9}-x-6}{4x-x^2} + \dfrac{2}{5}, & \text{si } 0 < x < 4, \\ \dfrac{\sqrt{2x+8}-4}{x-4}, & \text{si } x > 4. \end{cases}$

a Déterminer l'ensemble de définition de g

b Calculer $\lim\limits_{x\to 4^-} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to 4^+} g(x)$

c La fonction g est-elle prolongeable par continuité en 4 ?