| | | |
|---|---|---|
| ◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇ **LYCÉE SECONDAIRE DE KORBA** ◇◇◇◇◇◇◇◇◇ ◇◇◇◇ | | **Lundi 13-11-2023** |
| ◇◇◇ **NOUREDDINE Hmidène** ◇◇◇ | $3^{ème}$ ***Math*** | **Durée :** $2\ h$ |

# Devoir de contrôle de mathématique n°1

## Exercice 1:

I) Soit $g$ la fonction définie par $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de $g$.
2) a) Justifier la continuité de $g$ sur son ensemble de définition.
   b) Montrer que l'équation $g(x) = x^2$ admet au moins une solution dans $[1, 2]$.
3) Montrer que $g$ est prolongeable par continuité en $0$ à une fonction $G$ que l'on déterminera.
4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ : $g\left(E(x)\right) = 2$ et $E\left(g(x)\right) = 2$, où $E$ est la fonction partie entière.

II) Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1} & si \quad x < -1 \\ \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1-x}{x} & si \quad -1 \leqslant x < 0 \\ G(x) + a & si \quad 0 \leqslant x \end{cases}.$$

1) a) Etudier la continuité de $f$ en $-1$.
   b) Déterminer $a$ pour que $f$ soit continue en $0$.
2) En déduire les intervalles de continuité de $f$ ( Justifier ).

## Exercice 2:

- $ABCD$ est un rectangle de centre $O$ tel que $AD = 6$ et $AB = 8$.
- $I$ milieu de $[BC]$.
- $E$ et $F$ deux points tels que $\overrightarrow{DE} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{CF} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{CB}$

**1)** **a)** Faire une figure.
**b)** Montrer que $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EF} = 36$ puis déduire $\cos\widehat{AEF}$.
**c)** Calculer $AF$ et $OF$.

**2)** **a)** Calculer $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CE}$.
**b)** En déduire que $(AC)$ et $(EF)$ sont perpendiculaires.

**3)** Soit $(\Gamma) = \{M \in \mathcal{P}\ /\ 3MF^2 + MC^2 = 148$.
**a)** Vérifier que $O \in (\Gamma)$.
**b)** Montrer que $B$ est le barycentre des points pondérés $(C, 1)$ et $(F, 3)$.
**c)** Caractériser et construire $(\Gamma)$.

**4)** **a)** Déterminer les coordonnées des points $C$ et $F$ dans le repère $\left(O, \dfrac{1}{8}\overrightarrow{AB}, \dfrac{1}{6}\overrightarrow{AD}\right)$.
**b)** En déduire une équation cartésienne de $(\Gamma)$.

## Exercice 3:

Le plan est orienté dans le sens direct.

- $ABCD$ est un carré tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
- $I$ milieu de $[AB]$.
- $J$ et $K$ deux points qui se trouvent respectivement à l'interieur et à l'exterieur du carré $ABCD$ tels que $ABJ$ et $BCJ$ soient deux triangles équilatéraux.

**1)** Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DJ}}) \equiv \frac{5\pi}{12}[2\pi]$ puis déduire une mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DJ}})$.

**2)** Donner une mesure principale de $(\widehat{\overrightarrow{DJ}, \overrightarrow{DC}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{DK}, \overrightarrow{DC}})$.

**3)** En déduire que $D$, $J$ et $K$ sont alignés.

**4)** On pose $AB = a$, calculer $\overrightarrow{DJ} \cdot \overrightarrow{DK}$ en fonction de $a$.