

Prof : Dhahbi . A Lycée cité Ibn khaldoun		Devoir de contrôle n°1 Mathématiques
Coefficient : 4	Classes : 3 ^{ème} Maths 1	le 05/11/2025
		2 Heures

« Qui va lentement, va sûrement et qui va sûrement, va plus loin »

EXERCICE N° 1 : (6 points)

Soit la fonction f est définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{x-1}+2}$.

1°/ Justifier que f est continue sur $[1, +\infty[$.

2°/ a) Montrer que f est majorée par 1.

b) Vérifier que $f(x) = 1 - \frac{4}{\sqrt{x-1}+2}$ pour tout $x \geq 1$.

c) Montrer que f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

d) En déduire que f est bornée sur $[1, +\infty[$.

3°/ a) Montrer que l'équation $f(x) = -x+1$ admet une solution α dans l'intervalle $]1, 2[$.

b) Vérifier que $\sqrt{\alpha-1} = -2 + \frac{4}{\alpha}$.

4°/ Dans un repère orthonormé, on a construit sur l'annexe fournie page 3 la courbe Γ d'équation $y = \sqrt{x-1}$ ainsi que la restriction à l'intervalle $]0, +\infty[$ de l'hyperbole ζ d'équation $y = -2 + \frac{4}{x}$.

Construire le point A appartient à (ζ_f) d'abscisse α .

5°/ Soit la fonction définie sur $[1, +\infty[\setminus \{3\}$ par : $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x-5} & \text{si } x \in [\alpha, +\infty[\setminus \{5\} \\ \frac{1-x^2}{x^2-4x-5} & \text{si } x \in [1, \alpha[\end{cases}$

a) Montrer que g est prolongeable par continuité en 5.

b) Montrer que g est continue en α .

EXERCICE N°2 : (5 points)

NB : les question 1°, 2° et 3° de cet exercice sont indépendantes.

1°/ Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ tel que : pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(-x) + 3f(x) = 4x^4 + 2x^2 + 1$.

a) Montrer que f est une fonction paire.

b) En déduire l'expression de la fonction f .

2°/ Dans la figure Annexe 2 page 3 on a représenté graphiquement une fonction f définis sur $[-2, 5]$

Par lecture graphique :

a) Déterminer les intervalles sur les quels la fonction f est continue.

b) Déterminer $f([-2, 0])$ et $f([-2, 1])$

c) Résoudre l'inéquation : $2 \leq f(x) < 3$ et en déduire le domaine de définition de la fonction

g définie par : $g(x) = \frac{1}{E(f(x))-2}$.

d) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $E(f(x)) = 1$.

e) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(E(x)) = 1$.

N.B : On donnera une brève justification pour les questions c), d) et e).

Voir verso ➡

3°/ Montrer que $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} + \sqrt{2+x} - 5}{x-2} = \frac{11}{12}$

EXERCICE N°3 : (6 points)

Dans la figure ci-contre on considère les deux carrés ABCD et AGFE tels que : $AB = \sqrt{3}$.

E est le point du segment $[AB]$ tel que $\angle ADE = \frac{\pi}{6}$.

On désigne par I le milieu du segment $[AC]$

1°/a) Montrer que $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DE} = 3$.

b) En déduire que $DE = 2$ puis $AE = 1$.

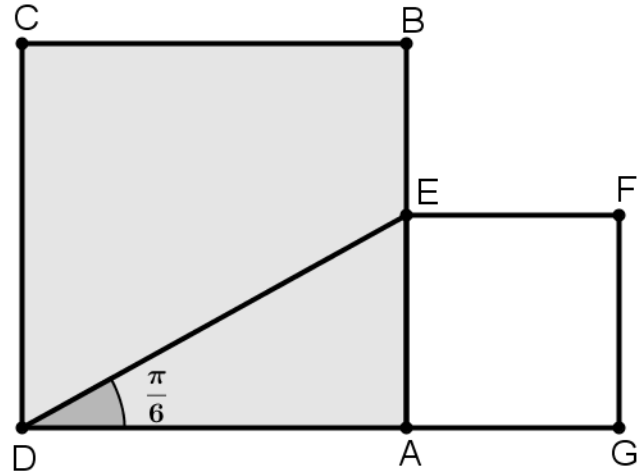
2°/ a) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AG}$.

b) En déduire que (DE) et (BG) sont perpendiculaires.

3°/ a) Montrer que $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DE} = 3 + \sqrt{3}$.

b) Vérifier l'égalité $\frac{3 + \sqrt{3}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

c) En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.



4°/ Déterminer l'ensemble $D = \{M \in P \text{ tel que } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CB}\}$.

5°/ Montrer que l'ensemble des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}) \overrightarrow{MC} = (MA^2) \overrightarrow{MC}$ est le cercle circonscrit au carré ABCD.

6°/ On considère le repère $(A, \overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AE})$ et soit J le milieu du segment $[BG]$.

a) Déterminer les coordonnées des points B, G, D, E et J.

b) Montrer que les droites (DE) et (BG) sont perpendiculaires.

c) Calculer $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AJ}$. En déduire une mesure de l'angle GAJ

EXERCICE N°4: (3 points)

Dans la figure ABC est un triangle isocèle de sommet principale A tel que $AB = AC = 4$

et H est le pied de la hauteur issue de A.

On se propose de déterminer la longueur x de coté $[BC]$ pour la quelle l'aire du triangle ABC est maximale.

1°/ Justifier que $x \in]0, 8[$.

2°/ On désigne par $A(x)$ l'aire du triangle ABC.

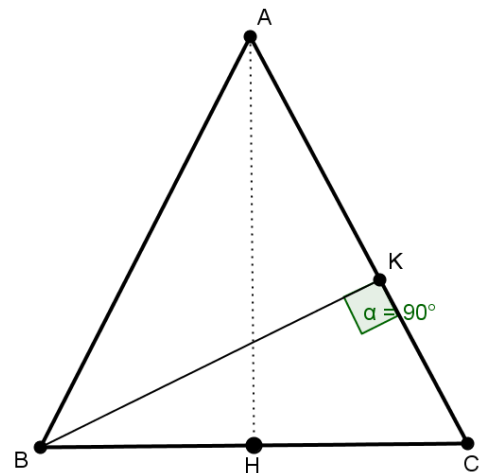
Montrer que $A(x) = \frac{x}{4} \sqrt{64 - x^2}$.

3°/ Soit K le pied de la hauteur issue de B dans le triangle ABC.

a) Vérifier que $A(x) = 2BK$.

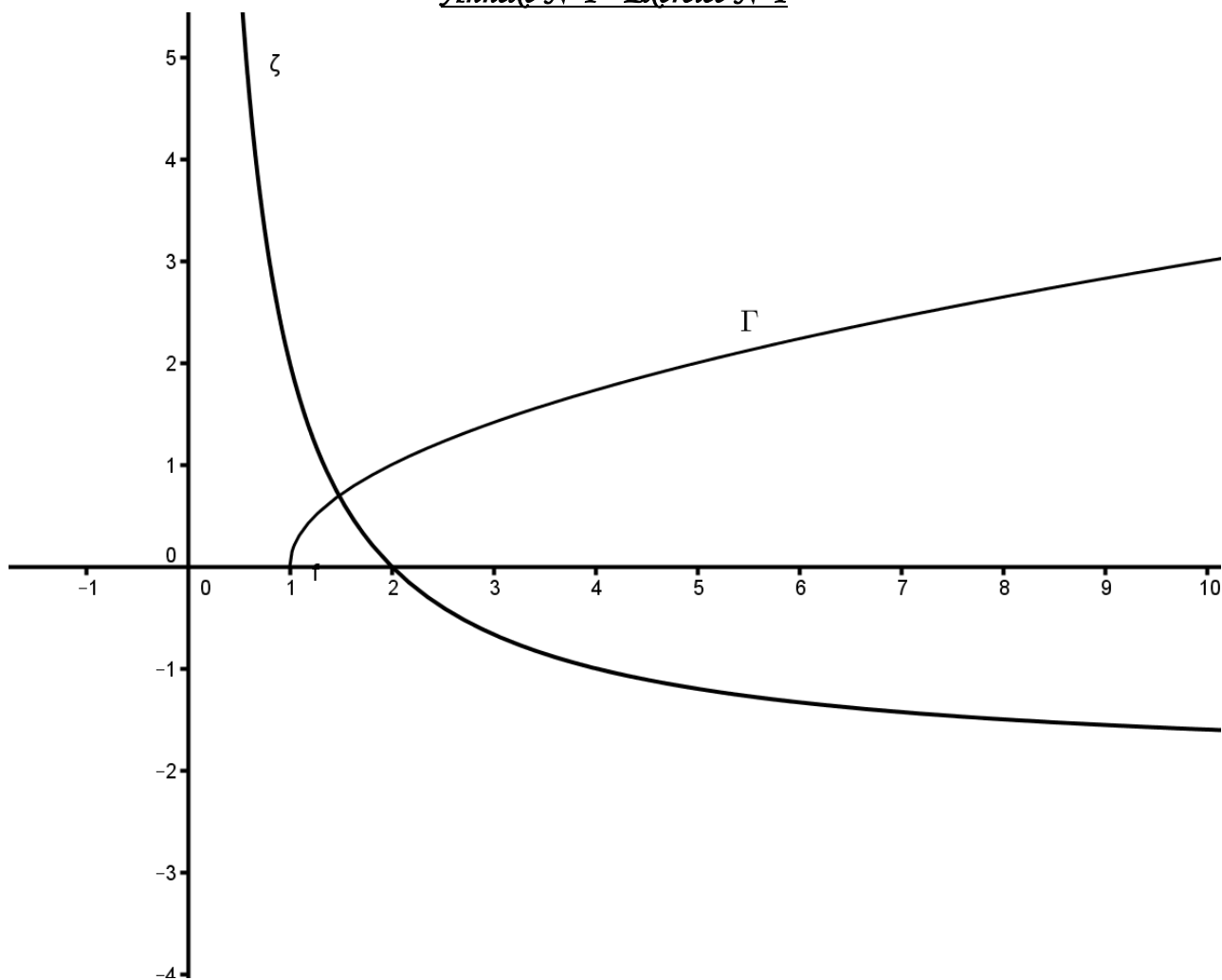
b) En déduire que $A(x) \leq 8$.

c) Déterminer alors la longueur x de coté $[BC]$ pour la quelle l'aire du triangle ABC est maximale.



Pour une bonne réussite

Annexe N°1 Exercice N°1



Annexe N°2 Exercice N°2

