

DEVOIR DE CONTRÔLE N°1

3^{ÈME} MATHS

DATE : 25/10/2023

DURÉE : 2H

✎ PROF : BENMBAREK MAHMOUD ✎

EXERCICE N° 1 ✧ 3 points ✧

Répondre par vrai ou faux en **justifiant** votre réponse.

- 1 La fonction $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 2}$ est bornée.
- 2 f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, si |f| est continue sur I alors f est continue sur I.
- 3 f une fonction continue sur $[a; b]$ telle que $f(a) < a.b$ et $f(b) > b^2$ alors il existe un réel $c \in [a; b]$ vérifiant $f(c) = b.c$.
- 4 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que : $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 2$ et $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 4(2 + \sqrt{3})$. Alors l'angle formé par les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est $\frac{5\pi}{6}$.

EXERCICE N° 2 ✧ 5 points ✧

A- Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{3x^2 - x^3}$.

- 1 Déterminer l'ensemble de définition de f.
- 2
 - a Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $3x^2 - x^3 = 4 - (x - 2)^2(x + 1)$.
 - b En déduire que f admet un maximum sur $[0; 3]$ que l'on précisera.

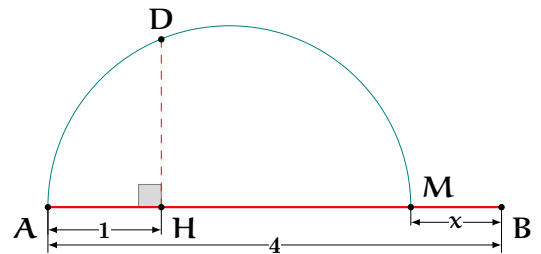
B-

Dans la figure ci-contre :

- ☐ [AB] est un segment de longueur 4.
- ☐ H est un point de [AB] tel que AH = 1.
- ☐ M est un point de du segment [HB] tel que BM = x.
- ☐ Γ est le demi cercle de diamètre [AM].
- ☐ La perpendiculaire à (AB) en H coupe Γ en D.

- 1
 - a Justifier que $\vec{AD} \cdot \vec{AM} = AD^2$
 - b En déduire que $AD = \sqrt{4 - x}$.
 - c Calculer alors DH.

- 2 Déterminer alors la position du point M pour que l'aire du triangle BMD est maximale.



EXERCICE N° 3 ✧ 5 points ✧

Dans le graphique ci-dessous

- ☐ $\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-4, 9]$
- ☐ La droite d'équation $x = -2$ est une asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

- 1 Déterminer :
 - a Les intervalles sur lesquels f est continue.

b L'image, par f , de chacun des intervalles : $[1, 6[$, $[-4, -2]$ et $[-2; 2]$.

2 **a** Résoudre graphiquement les équations : $E(f(x)) = 0$ et $f(E(x)) = 0$ où $E(x)$ désigne la partie entière de x .

b Résoudre, dans l'intervalle $[-2, 9]$, l'inéquation $\sqrt{f(x) + 1} \leq \sqrt{5}$.

3 Montrer que, l'équation $f(x) = -x^3$, admet au moins une solution dans l'intervalle $[-1, 1]$.

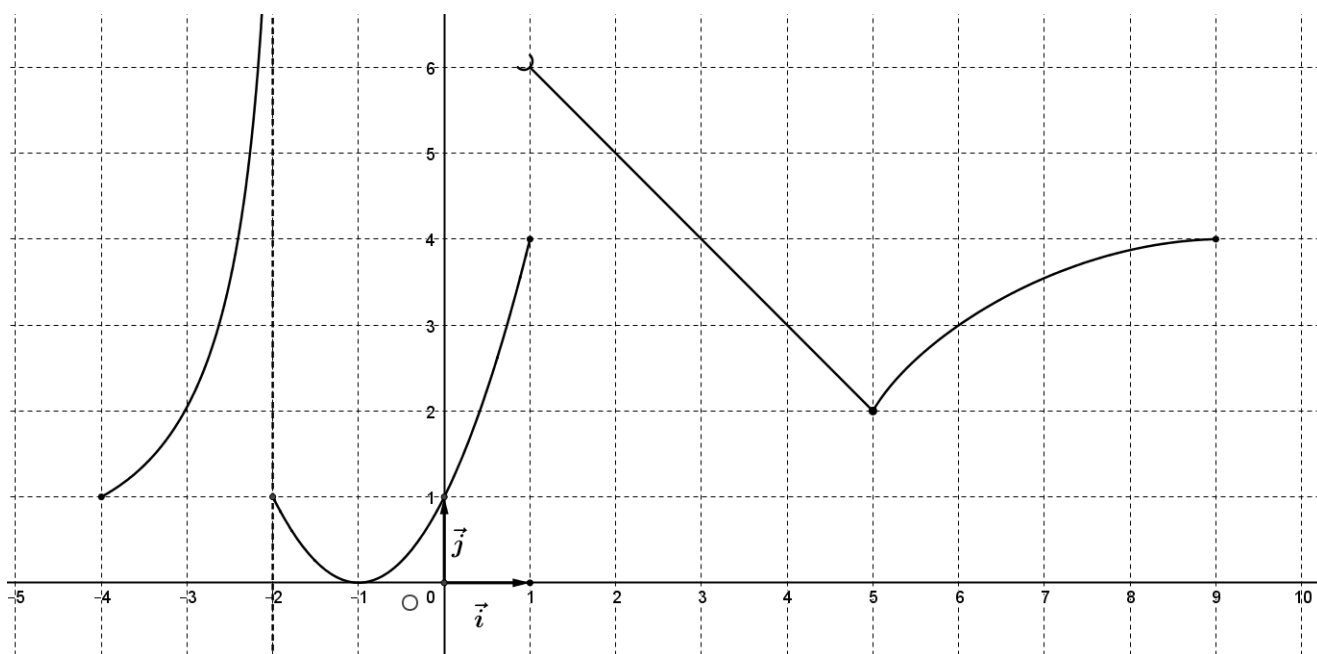
4 Pour tout $x \in [-2; 1]$, on donne $f(x) = x^2 + 2x + 1$ et on désigne par $A(-2, -1)$ et M le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x .

a Vérifier que $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM} = -x^2 - 4x - 1$.

b Déterminer les coordonnées de M dans chacun des cas suivants :

■ Le triangle OAM soit rectangle en O .

■ $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM}$ soit maximal.



EXERCICE N° 4 * 7 points *

On donne un parallélogramme $ABCD$ de centre I tels que : $AB = 2$, $AD = 2\sqrt{2}$ et $\widehat{BAD} = \frac{3\pi}{4}$.

1 **a** Calculer $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AB}$.

b En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.

c Faire une figure.

2 Soit M un point de la droite (AB) . On pose $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$, avec $x \in \mathbb{R}$.

a Montrer que $\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AD} = -2 - 4x$.

b Déterminer alors le point F de (AB) tel que (IF) est perpendiculaire à (AD) .

c Vérifier que F est le barycentre des points pondérés $(A, -3)$ et $(B, 1)$

3 Pour tout point M du plan, on pose $f(M) = MB^2 - 3MA^2$.

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M du plan tels que $f(M) = k$ où k est un réel donné.

a Montrer que $f(M) = -2MF^2 + 6$.

b Discuter suivant le paramètre réel k la nature de l'ensemble $\mathcal{E}$.

4 Soit Δ l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{FB} = 6$.

- a Vérifier que $I \in \Delta$.
- b Déterminer alors l'ensemble Δ .
- c Dans le cas où $\mathcal{C}$ est un cercle, déterminer k pour que $\mathcal{C}$ soit tangent à Δ .

« ... Croyez en vos rêves et ils se réaliseront peut-être. Croyez en vous et ils se réaliseront sûrement... ».
Martin Luther King