

**NB :** Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation.

**Exercice 1 (7 points) :**

- Soit la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ 
  - Déterminer  $D$  le domaine de définition de  $f$ .
  - Justifier la continuité de  $f$  sur  $D$ .
  - Montrer que  $f$  est borné sur  $D$ .
- Calculer  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .
  - En déduire que  $f$  admet un prolongement par continuité  $F$  en 1 que l'on précisera.
- Etudier le sens de variation de  $f$ .
  - Montrer alors que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on a :  $\frac{\sqrt{n}}{1+2\sqrt{n}} \leq \frac{\sqrt{n+1}}{1+2\sqrt{n+1}}$ .
- Montrer que l'équation  $f(x) = -x + 2$  admet une unique solution  $\alpha \in ]1,2[$  et que  $f(x) = \frac{x}{6}$  admet une solution unique  $\beta$  dans  $]\frac{5}{4}, \frac{7}{4}[$ .
  - Donner un encadrement de  $\alpha$  à 0.5 près.
  - Vérifier que  $\sqrt{\alpha} + 3 = \frac{2\alpha-3}{-\alpha+2}$ .
  - Montrer que  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{(2-\alpha)\sqrt{x+3}-2\alpha+3}{(2-\alpha)(x-\alpha)} = \frac{2-\alpha}{4\alpha-6}$ .
  - Justifier que :  $\beta^3 - \beta^2 + 24\beta - 36 = 0$ .
- Soit  $a$  et  $b$  deux paramètres réels et soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :
 
$$\begin{cases} \frac{-2x^2-E(x)}{x+1} & \text{si } x \in ]-\infty; -1[ \\ \frac{-x}{x+2} + ax + b & \text{si } x \in [-1,1] \\ \frac{x^3-1}{x^2-1} & \text{si } x \in ]1, +\infty[ \end{cases} \quad (E(x) \text{ désigne la partie entière de } x).$$
  - Montrer que  $g$  est continue en  $-1$  si et seulement si  $-a + b = 3$ .
  - Déterminer la limite de  $g$  à droite en 1.
  - Déterminer  $a$  et  $b$  pour que  $g$  soit continue en 1 et  $-1$ .
  - Etudier la continuité de  $g$  sur son domaine de définition.

**Exercice 2 (7 points) :**

Soit  $ABC$  un triangle équilatéral de centre  $O$  et de coté  $a$  tel que  $(\widehat{AB}, \widehat{AC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$  et  $BCD$  un triangle rectangle et isocèle en  $C$  tel que  $(\widehat{CD}, \widehat{CB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$  et on désigne par  $I$  le milieu du segment  $[AC]$ .

- Calculer  $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BA}$  et en déduire que  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ .

2. Soient les points  $E, F$  et  $\Omega$  définies par  $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$  et  $\Omega = E * F$ .

Montrer que  $(AB) \perp (EF)$  et en déduire que  $EF = \frac{\sqrt{3}}{3}a$ .

3. Soit l'ensemble  $\xi = \left\{M \in P \text{ tel que } ME^2 + MF^2 = \frac{5}{9}a^2\right\}$ .

Montrer que  $\xi$  est un cercle passant par  $A$  dont on précisera le centre et le rayon. Tracer  $\xi$ .

4. Soit l'ensemble  $\Delta = \left\{M \in P \text{ tel que } \overrightarrow{EM} \cdot \overrightarrow{BO} = \frac{\sqrt{3}}{3}a^2\right\}$ .

a/ Montrer que  $OEF C$  est un parallélogramme.

b/ Déterminer et construire  $\Delta$ .

5. La droite  $(AF)$  recoupe  $\xi$  en  $G$ . Soit  $A'$  le point diamétralement opposé à  $A$  sur  $\xi$ .

Calculer  $\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FG}$  et en déduire  $FG$ .

6. a/ Montrer que  $G$  est le barycentre des points pondérés  $(C, 5)$  et  $(A, 1)$ .

b/ Soit l'ensemble  $\Gamma_k = \{M \in P \text{ tel que } 5MC^2 + MA^2 = k\}$  où  $k$  est un paramètre réel.

Déterminer suivant les valeurs de  $k$ , la nature de l'ensemble  $\Gamma_k$ .

c/ Trouver  $k$  pour que  $\Gamma_k$  soit tangent à  $\Delta$ .

### Exercice 3 (6points) :

Le plan  $P$  est orienté dans le sens direct. Soit  $ABC$  un triangle isocèle en  $A$ , inscrit dans un cercle  $\xi$  de centre  $O$ , tel que  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv -\frac{127\pi}{4} [2\pi]$ .

1. a/ Déterminer la mesure principale de chacun des angles orientés  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$  et  $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ .

b/ Soit le point  $D$  symétrique de  $B$  par rapport à  $O$ .

Déterminer la mesure principale de chacun des angles orientés  $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC})$  et  $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA})$ .

2. Déterminer et construire l'ensemble  $(\Gamma) = \left\{M \in P \text{ tel que } (\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MB}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]\right\}$ .

3. La droite  $(DC)$  recoupe  $(\Gamma)$  en  $E$ . La droite  $(AB)$  recoupe  $(\Gamma)$  en  $F$ .

Soit  $\xi'$  le cercle circonscrit au triangle  $BCE$  et soit  $O'$  son centre.

a/ Montrer que :  $(\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{EF}) \equiv (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) [2\pi]$ .

b/ Déduire que les droites  $(AD)$  et  $(EF)$  sont parallèles.

4. La tangente à  $\xi$  en  $A$  et la tangente à  $\xi'$  en  $F$  se coupent en un point  $I$ .

a/ Vérifier que  $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AF}) \equiv (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) [2\pi]$  et que  $(\overrightarrow{FI}, \overrightarrow{FA}) \equiv (\overrightarrow{CF}, \overrightarrow{CB}) [2\pi]$ .

b/ En déduire que  $I$  est un point du cercle circonscrit au triangle  $ACF$ .

5. Soit  $J$  et  $K$  les projetés orthogonaux respectives de  $I$  sur chacune des droites  $(AC)$  et  $(AF)$ .

a/ Vérifier que  $I, J, A$  et  $K$  sont situés sur un même cercle.

b/ Les droites  $(JK)$  et  $(FC)$  se coupent en un point  $L$ .

Montrer que  $2(\overrightarrow{FL}, \overrightarrow{FI}) \equiv 2(\overrightarrow{KJ}, \overrightarrow{KI}) [2\pi]$ . En déduire que  $L$  est un point du cercle

. Circonscrit au triangle  $KIF$ .

c/ Montrer alors que  $IFL$  est un triangle rectangle

**Bonne Chance**