Lycée 2 Mars Ksar - Hellal
Mandhouj .M

Devoir de contrôle n° 2

Durée : 2Heures

$4^{ème}$ M_2

Le 07/03/2011

Exercice1

Dans le plan orienté P, on considère un carré ABCD de centre I tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$, F le centre du cercle inscrit au triangle ABC , J et K les milieux respectifs de [BC] et [AB] .

1) a/ On considère les applications $f = S_{(BD)} \circ S_{(BC)}$ et $g = S_{(BC)} \circ S_{(FC)}$.
Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f et montrer que $g = R_{\left(C\,,\ \frac{\pi}{4}\right)}$

b/ Montrer que $R_{\left(B\,,\ \frac{\pi}{2}\right)} \circ R_{\left(C\,,\ \frac{\pi}{4}\right)} = R_{\left(F\,,\ \frac{3\pi}{4}\right)}$

c/ Donner une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{FC}\,,\ \overrightarrow{FA}\right)$

2) Déterminer et caractériser les applications $S_{(BC)} \circ S_{(IK)}$ et $\varphi = f \circ t_{\overrightarrow{AB}}$

3) On pose $h = S_{(AC)} \circ t_{\overrightarrow{CD}}$, déterminer h(C) et h(D) et caractériser h.

Exercice2

On considère la fonction g définie sur $]0\,,+\infty[$ par $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$.

1) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

2) a/ Montrer que pour tout $x \in]0\,,+\infty[$, $g'(x) = -4x\ln x$

b/ Compléter le tableau de variation de g :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$					
$g(x)$	1	$\nearrow$		$\searrow$	

c/ Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $]0\,,+\infty[$ une unique solution α et que $1{,}8 < \alpha < 1{,}9$.

d/ Déduire de qui précède le signe de g(x)

3) On considère la fonction f définie sur $]0\,,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{1+x^2}$

a/ Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

b/ Montrer que f est dérivable sur $]0\,,+\infty[$ et que $\forall\, x \in]0\,,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x\,(1+x^2)^2}$

c/ vérifier que $f(\alpha) = \dfrac{1}{2\,\alpha^2}$.

4) Etudier les variations de f et tracer sa courbe C dans un plan rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice3

A/ Soit F la fonction définie sur IR par $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$.

1) Justifier la dérivabilité de F et calculer $F'(x)$.

2) On pose pour tout $x \in \left[0\,,\ \frac{\pi}{2}\right[$, $f(x) = F(\tan x)$.

a/ Montrer que f est dérivable sur $\left[0\,,\ \frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $f'(x)$.

b/ Calculer f (0) et en déduire que $f(x) = x$, pour tout $x \in \left[0\,,\ \frac{\pi}{2}\right[$.

c/ En déduire que $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$.

B/ Soit (u_n) la suite définie sur IN* par : $u_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}$

1) Montrer que pour tout réel x : $1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} - \frac{1}{1+x^2} = (-1)^n \, \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$

2) En déduire que $u_n - \frac{\pi}{4} = (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\,dx$

3) Montrer que pour tout réel $x \in [0\,,1]$ et pour tout $n \in IN^*$: $\frac{x^{2n+2}}{1+x^2} \leq x^{2n+2}$

En déduire que pour tout $n \in IN^*$, $\left|u_n - \frac{\pi}{4}\right| \leq \frac{1}{2n+3}$.

Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Fin