Exercice 1

Répondre par Vrai ou Faux en justifiant la réponse.

1) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,,\vec{u}\,,\vec{v})$, la transformation qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $i\bar{z}+1$ est une symétrie orthogonale.

2) Dans le plan orienté on donne un triangle ABC.

Si φ est l'isométrie du plan qui transforme respectivement A, B et C en B, C et A alors φ est un antidéplacement.

Exercice 2

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $S_n = 1 + 31 + 31^2 + \cdots + 31^{n-1}$.

1) ***a)*** Montrer que : $S_{2013} - 31 \times S_{2012} = 1$.

b) En déduire que 31 et S_{2013} sont premiers entre eux.

2) Montrer que Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on a : $30 \times S_n = 31^n - 1$.

3) ***a)*** Montrer que $31^{2013} \equiv 1\ (mod\ S_{2013})$.

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ la congruence : $31x \equiv 1 (mod\ S_{2013})$

4) Par la suite on admet que 2011 est premier.

a) Montrer que si n est premier et $n \geq 7$ alors n divise $S_n - 1$.

b) Déterminer le reste modulo 2011 du nombre S_{2013}.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $]0\,,1]$ par $f(x) = \sqrt{-\ln x}$ et soit C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$.

1) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1 et interpréter le résultat obtenu graphiquement.

2) Soit α un réel de l'intervalle $]0\,,1]$. L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k}\right)$. On note $\mathcal{V}\,(\alpha)$ le volume du solide engendré par la rotation de l'arc défini par les points $M(x\,,y)$ du plan $(O\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$ tels que $\alpha \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq f(x)$

Calculer $\mathcal{V}\,(\alpha)$ puis $\lim\limits_{\alpha\to 0^+}\ (\alpha)$.

Exercice 4

1) Soit la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = e^x - x - 1$.

a) Dresser le tableau de variation de u et en déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$; $u(x) \geq 0$.

b) En déduire que $\forall x > 0$; $e^{-x} \leq \frac{1}{1+x}$

c) Montrer que $\forall x > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $1 - \frac{1}{nx} \leq e^{-\frac{1}{nx}} \leq 1 - \frac{1}{1+nx}$

2) Soit les suites (U_n) et (V_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n = \int_1^2 \left(1 - e^{-\frac{1}{nt}}\right) dt$ et $V_n = nU_n$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $\frac{1}{n}\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \leq U_n \leq \frac{\ln 2}{n}$

b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$

3) Soit g la fonction définie sur $]0\,,+\infty[$ par $g(t) = 1 - e^{-\frac{1}{t}}$ et soit la fonction F_n définie sur $[1\,,+\infty[$ par $F_n(x) = \int_n^{nx} \left(1 - e^{-\frac{1}{t}}\right) dt$; avec $n \in \mathbb{N}^*$

a) Montrer que pour tout réel $x \geq 1$; $F'_n(x) = n\left(1 - e^{-\frac{1}{nx}}\right)$.

b) Calculer $F_n(1)$ puis déduire que $U_n = \frac{1}{n}\int_n^{2n} g(t)dt$

c) Interpréter graphiquement les termes de chacune des suites (U_n) et (V_n).