Exercice 1 (6 points)

Soit $ABCD$ un carré de centre O tel que :$\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. Les points I et J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AD]$.

1) Soit S la similitude directe qui transforme D en O et C en I.
   a) Déterminer le rapport et l'angle de S.
   b) Construire son centre Ω.
2) a) Déterminer les images des droites (BD) et (BC) par S. En déduire que : $S(B) = A$.
   b) Montrer que $S(A) = J$.
   c) Caractériser l'application : S o S.
   d) Déterminer $(S \text{ o } S)(B)$. En déduire que $\overrightarrow{\Omega B} + 4\overrightarrow{\Omega J} = \vec{0}$.
3) Soit σ la similitude indirecte qui transforme D en O et C en I. Et soit $S_{(OI)}$ la symétrie orthogonale d'axe (OI).
   a) Vérifier que : $\sigma = S_{(OI)}\circ S$.
   b) Déterminer : σ (B).
   c) Déterminer les éléments caractéristique de la similitude σ.

Exercice 2 (7 points)

1) Soit dans C l'équation (E) : $z^2 - \left(e^{i\alpha} - ie^{-i\alpha} + 2\right)z - i + 2e^{i\alpha} = 0$ où α est un paramètre réel.
   a) Vérifier que $z_1 = e^{i\alpha}$ est une solution de l'équation (E).
   b) En déduire l'autre solution z_2 de l'équation (E).
2) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit φ l'application du plan dans luis même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = -i\bar{z} + 2$.
   a) Déterminer l'ensemble I des points invariants par φ.
   b) Montrer que φ est une symétrie glissante.
   c) On désigne par $\vec{u}$ son vecteur; déterminer l'expression complexe associé à l'application $\varphi\circ\varphi$. En déduire l'affixe de $\vec{u}$.
   d) On désigne par Δ son axe, déterminer l'expression complexe associé à l'application $\varphi\circ t_{-\vec{u}}$. En déduire une équation cartésienne de Δ.
3) On désigne par A, B, M_1et M_2 les points du plan d'affixes respectifs :

$$1\ ;\ i\ ;\ z_1 = e^{i\alpha} \text{ et } z_2 = -ie^{i\alpha} + 2$$

a) Montrer que lorsque α varie, le point M_1 varie sur un cercle fixe $\mathcal{C}$ que l'on déterminera.

b) Vérifier que : $\varphi(B) = A$ et : $\varphi(M_1) = M_2$

c) En déduire que lorsque α varie, le point M_2 varie sur un cercle fixe $\mathcal{C}$' que l'on déterminera.

Exercice 3 (7 points)

Soit la fonction : $x \mapsto 1 + \sin(\pi x)$ $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

1) a) Montrer que f réalise une bijection de $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ sur $[0, 2]$.

b) Soit f^{-1} la fonction réciproque de f. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]0, 2[$.

c) Etudier la dérivabilité de f^{-1} en 0.

c) Vérifier que : $\forall x \in]0, 2[$ $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{2x - x^2}}$

2) Soit la fonction g définie sur $]0, 2[$ par : $g(x) = f^{-1}(2 - x) + f^{-1}(x)$.

a) Montrer que g est dérivable sur $]0, 2[$.

b) Calculer $g'(x)$ pour tout x de $]0, 2[$.

c) Calculer $g(1)$. En déduire que : $\forall x \in]0, 2[$ on a : $f^{-1}(2 - x) = -f^{-1}(x)$.

3) Soit la suite réelle U définie sur IN^* par : $U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f^{-1}\left(1 + \frac{1}{n + k}\right)$

a) Montrer que $\forall n \in IN^*$; $\forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ on a
$f^{-1}\left(1 + \frac{1}{2n}\right) \leq f^{-1}\left(1 + \frac{1}{n+k}\right) \leq f^{-1}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

b) En déduire que : $\forall n \in IN^*$ on a : $\frac{n+1}{n} f^{-1}\left(\frac{2n+1}{2n}\right) \leq U_n \leq \frac{n+1}{n} f^{-1}\left(\frac{n+1}{n}\right)$

c) En déduire que la suite U est convergente et déterminer sa limite.