Lycée 2 Mars 34 Ksar Hellal	**Devoir de contrôle n°2**		
Prof : Boudhaouia			
4ème Math	Date : 13-02-2014	Durée : 2 h	*Mathématiques*

Exercice 1 (5 points)

Soit la suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^n \, dx$

1) a) Calculer U_1 et U_2

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a $U_n + U_{n+2} = \frac{1}{n+1}$

c) Calculer alors U_3 et U_4

2) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a $U_n \geq 0$.

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

c) Montrer que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 2 (7 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1}$$

1) a) Dresser le tableau des variations de la fonction f sur $\mathbb{R}_+$

b) Tracer sa courbe ζ dans un repère orthonormé $R = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan.

c) Montrer graphiquement que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution.

2) a) Montrer que f admet une application réciproque f^{-1} définie sur $]1, 2]$.

b) Calculer : $f^{-1}(x)$ en fonction de x pour tout $x \in]1, 2]$.

c) Tracer dans le repère R la courbe ζ' de la fonction f^{-1}.

3) Soit la fonction φ définie sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right[$ par :

$$\varphi(x) = \int_0^{\tan x} f(t) dt$$

a) Montrer que φ est dérivable sur $\left[0\,,\frac{\pi}{4}\right[$.

b) Vérifier que $\forall x \in \left[0\,,\frac{\pi}{4}\right[$; $\varphi'(x) = (\tan x)^2 + 2$.

c) Exprimer alors $\varphi(x)$ en fonction de x ; pour tout $x \in \left[0\,,\frac{\pi}{4}\right[$.

d) En déduire l'aire $\mathcal{A}$ du domaine plan limité par la courbe ζ et les droites d'équations :

$x = 0$; $x = 1$ et $y = 1$

Exercice 3 (8 points)

Soit IOA un triangle équilatéral direct ; B est le symètrique de A par rapport à la droite (OI), J est le milieu du segment $[AO]$ et K le milieu du segment $[OB]$.

1) a) Montrer que le triangle IBO est équilatéral direct.

b) Soit R la rotation du plan qui transforme A en O et O en B.

Déterminer son centre et son angle.

2) Soit ζ le cercle de centre O et passant par le point A ; M un point du de ζ et M' son image par la rotation R.

a) Montrer que lorsque M décrit le cercle ζ le point M' décrit un cercle ζ' que l'on déterminera.

b) Comparer les mesures des angles orientés : $\left(\overrightarrow{OI}\,,\overrightarrow{OM}\right)$ et $\left(\overrightarrow{BI}\,,\overrightarrow{BM}\right)$.

c) On désigne par Ω le deuxième point d'intersection des cercles ζ et ζ' autre que I.

Montrer que ; lorsque $M \neq \Omega$ et $M' \neq \Omega$; les points Ω, M et M' sont alignés.

3) a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f qui transforme A en O et O en B.

b) Montrer que f est une symétrie glissante et déterminer ses éléments caractéristiques.

c) Vérifier que $f = R \circ S_{(OA)}$

d) Déterminer l'ensemble E des points M du plan tels que $R(M) = f(M)$.