Exercice 1 (4 points)

Donner la réponse correcte sans aucune justification.

A/

1) Soit f l'application du plan complexe vers lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = 2z + 1 + i$ alors f est :

a) une translation b) une rotation c) une homothétie

2) Soit g l'application du plan complexe vers lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = 2i\bar{z} + 3i$ alors g est :

a) une homothétie b) une similitude indirecte c) une symétrie axiale

B/

Soit f une symétrie glissante d'axe Δ.

1) Soit D une droite parallèle à Δ, alors f o S_Δ est :

a) une translation b) une rotation c) une symétrie centrale

2) Soit D une droite sécante à Δ alors f o S_Δ est :

a) une translation b) une rotation c) une symétrie centrale

C/

Soit S une similitude directe de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

1) Soit h une homothétie de rapport 2 alors S o h^{-1} est :

a) une homothétie b) une rotation c) une translation

2) Soit R une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ alors S o R est :

a) une homothétie b) une translation c) une symétrie centrale

Exercice 2 (8 points)

Soit $ABCD$ un carré de centre O tel que $(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et $J = A * B$, la bissectrice intérieure de $(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AC})$ coupe $[BC]$ en J.

1) a) Montrer qu'il existe une unique similitude directe f qui transforme I en O et B en C.

b) Déterminer le rapport et l'angle de f.

c) Montrer que A est le centre de f.

d) Donner la forme réduite de f.

2) Soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

a) Montrer que : $R = S_{(AC)}$ o $S_{(AJ)}$

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'application : $\sigma = f$ o $S_{(AJ)}$

3) On pose : $E = S_B(A)$ et on désigne par g la similitude indirecte qui transforme : I en D et D en E.

a) Montrer que 2 est le rapport de g en déduire que g admet un centre.

b) Déterminer $(g \text{ o } g)\ (I)$. En déduire que A est le centre de g.

c) Déterminer alors l'axe de g.

<u>Exercice 3</u> (8 points)

Soit la suite U définie sur IN^* par : $U_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n\, x \ \ dx$.

1) a) Justifier l'existence de U_n pour tout $n \in IN^*$.

b) Montrer que $\forall n \in IN^*$, $U_n \geq 0$.

c) Montrer que la suite U est décroissante. Que peut-on conclure ?

d) Vérifier que : $U_1 = 1$ et que $U_2 = \frac{\pi}{4}$.

2) a) A l'aide d'une intégration par parties montrer que :

$\forall n \in IN^*$ on a : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n x\, cos^2 x\, dx = \frac{1}{n+1} U_{n+2}$.

b) En déduire $\forall n \in IN^*$ on a : $U_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\ U_n$.

c) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$ on a : $\frac{n}{n+1}\ U_n \leq U_{n+1} \leq U_n$

En déduire la limite de $\frac{U_{n+1}}{U_n}$.

3) a) Montrer par récurrence que : $n\ U_n\ U_{n-1} = \frac{\pi}{2}$

b) En déduire la limite de la suite .