Lycée 14 Janvier	**DEVOIR DE CONTROLE N° 1**	$4^{ème}$ M
Mr : Montassar	Durée : 2 h	Le 31/10/2016

http://mathematiques.kooli.me/

Exercice 1 (6 pts)

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E) : iz^2 - 3iz + 3i - 1 = 0$.

2) Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on pose : $f(z) = iz^3 + (1-3i)z^2 - (4-3i)z + 3 + i$

   a) Montrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une unique solution imaginaire pure que l'on déterminera.

   b) Déterminer les nombres complexes a, b et c tels que : $\forall z \in \mathbb{C}$; $f(z) = (z-i)(az^2 + bz + c)$.

   c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.

3) a) Ecrire sous forme exponentielle le nombre complexe : $1 + i\sqrt{3}$

   b) En déduire la forme exponentielle de chacun des complexes suivants : $3 + i\sqrt{3}$ et $2i - \left(1 + i\sqrt{3}\right)$

Exercice 2 (7 pts)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A et B d'affixes respectives : $z_A = \sqrt{3} + i$ et $z_B = \sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} + 1)$.

1) a) Montrer que les points O, A et B ne sont pas alignés.

   b) Déterminer l'affixe z_G du point G centre du triangle OAB.

   c) Déterminer l'écriture exponentielle du complexe z_A.

2) Soit C le point du plan tel que : $OA = OC$ et $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}\right) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$

   a) Montrer que $|z_C| = 2$ et $\arg(z_C) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ où z_C est l'affixe du point C.

   b) En déduire que $z_C = 1 + i\sqrt{3}$

3) a) Montrer que $OABC$ est un losange.

   b) $OABC$ est-il un carré ?

4) Déterminer et construire l'ensemble $E = \left\{ M(z) \in P / \arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_C}\right) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi] \right\}$

Exercice 3 (7 pts)

1) Soit la fonction g définie sur $[0\ ,\ \pi]$ par : $g(x) = -9x\sin x - 9\cos x + 12$

a) Vérifier que : $\forall x \in [0\ ,\ \pi]; g'(x) = -9x\cos x$.

b) Dresser le tableau de variation de g sur $[0\ ,\ \pi]$.

c) Déterminer les images par la fonction g des intervalles $\left[0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right]$ et $\left[\frac{\pi}{2}\ ,\ \pi\right]$.

d) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $[0\ ,\ \pi]$ exactement deux solutions qu'on notera α et β.

2) Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{3\cos x - 4}{3x}$.

a) Montrer que $\forall x \in \left]0\ ,\ +\infty\right[; \dfrac{-7}{3x} \leq f(x) \leq \dfrac{-1}{3x}$.

b) Montrer que $\forall x \in \left]-\infty\ ,\ 0\right[; \dfrac{-1}{3x} \leq f(x) \leq \dfrac{-7}{3x}$.

c) Déduire les valeurs des limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

3) a) Vérifier que : $\forall x \in \left]0\ ,\ \pi\right]; f'(x) = \dfrac{g(x)}{9x^2}$.

b) Déterminer alors le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $\left]0\ ,\ \pi\right]$.