Exercice 1 (6 pts)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2+1} + x^3 & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = \cos(x^2) & \text{si } x > 0 \end{cases}$

1) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

2) Etudier la continuité de f en 0.

3) **a)** Etudier la dérivabilité de f en 0.

b) Justifier que f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ et calculer $f'(x)$ sur chacun de ces intervalles.

4) Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet au moins une solution α dans $[-1, 0]$

Exercice 2 (5 pts)

I Pour tout entier naturel ≥ 1 , on définie la fonction $f_k : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x^k}{\sqrt{x^2+1}}$$

Démontrer que la fonction f_k est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

II Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} U_0 = \dfrac{1}{2} \\ U_{n+1} = \dfrac{(U_n)^2}{\sqrt{(U_n)^2+1}} \end{cases}$$

1) **a)** Montrer par récurrence que : la suite (U_n) est strictement décroissante.

b) Montrer par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$; $0 < U_n < 1$

2) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

3) **a)** Montrer que: $\forall\, n \in \mathbb{N}$; $0 < U_{n+1} < \frac{U_n}{\sqrt{2}}$

b) Retrouver alors la limite de la suite (U_n)

Exercice 3 (5 pts)

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2+(2-i)z-2i=0$

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points $A(-2)$ et $B(i)$

A tout complexe $z\neq -2$ on associe le complexe Z définie par :

$$Z=\frac{z-i}{z+2}$$

a) Déterminer l'ensemble E_1 des points M d'affixe z tel que $|Z|=1$

b) Déterminer l'ensemble E_2 des points M d'affixe z tel que Z soit un réel négatif

c) Déterminer l'ensemble E_3 des points M d'affixe z tel que $arg(Z)\equiv\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

Exercice 4 (4 pts)

1) **a)** Donner la forme exponentielle du complexe $4\sqrt{2}(-1+i)$.

b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3=4\sqrt{2}(-1+i)$

2) soit $\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. Montrer que : $\frac{2z-1}{z}=2e^{i\theta}\Leftrightarrow z=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i\,cotan\left(\frac{\theta}{2}\right)$

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(2z-1)^3=4\sqrt{2}(-1+i)z^3$