Exercice 1 (6,5 points)

Soit la fonction f définie sur IR^* par : $f(x)=\dfrac{x^3+2}{x}$.

1) a) Montrer que f est dérivable sur IR^* et que $\forall x\in IR^*$ on a : $f'(x)=\dfrac{2(x-1)(x^2+x+1)}{x^2}$

   b) Dresser le tableau de variation de f sur IR^*

   c) Déterminer l'image par f de chacun des intervalles suivants : $]-\infty,0[$; $[1,+\infty[$ et $]0,+\infty[$.

2) a) Montrer que l'équation $f(x)=4$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[1\ ,\ 2]$.

   b) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans l'intervalle $[-2\ ,\ -1]$ une unique solution α.

   c) Déterminer une valeur approchée par défaut de α à $0{,}25$ près.

3) Montrer que l'équation $f(x)=\dfrac{1}{2}x$ admet dans l'intervalle $[-2\ ,\ -1]$ une unique solution.

Exercice 2 (6,5 points)

Soit les suites U et V définies sur IN par :

$U_0=0$; $V_0=1$ $\forall n\in IN$ on a : $U_{n+1}=\dfrac{2U_n+V_n}{3}$ et $V_{n+1}=\dfrac{3U_n+2V_n}{5}$.

1) Calculer U_1 et V_1.

2) Montrer, par récurrence, que $\forall n\in IN$ on a : $U_n\le V_n$.

3) Montrer que la suite U est croissante et que la suite V est décroissante.

4) Montrer que les suites U et V sont convergentes et qu'elles admettent la même limite.

5) Soit la suite W définie sur IN par : $W_n=9U_n+5V_n$

   a) Montrer que W est une suite constante.

   b) En déduire la valeur de la limite commune des suites U et V.

Exercice 3 (7 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère le point A d'affixe -1 et les points M, N et P d'affixes respectifs z, z^2 et z^3 où z est un nombre complexe non nul différent de -1 et de 1.

1) a) Montrer que : le triangle MNP est rectangle en P si et seulement si $\frac{1+z}{z}$ est imaginaire pur.

b) On pose $z = x + iy$ où $x \in IR$ et $y \in IR$. Montrer que $\frac{1+z}{z} = \frac{x^2 + y^2 + x - iy}{x^2 + y^2}$

c) En déduire que l'ensemble (Γ) des points M, tels que le triangle MNP soit un triangle rectangle en P est le cercle de diamètre $[OA]$, privé des points O et A.

2) Soit M le point de l'ensemble (Γ) tel que $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) \equiv \frac{7\pi}{8}[2\pi]$ et H son projeté orthogonal sur l'axe $(O, \vec{u})$.

a) Faites une figure ; on choisira 6 cm pour l'unité du repère $(0, \vec{u}, \vec{v})$.

b) On rappelle que z, z^2 et z^3 sont les affixes respectifs des points M, N et P.

Montrer que $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) \equiv \frac{7\pi}{8}[2\pi]$; $(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OP}) \equiv \frac{7\pi}{8}[2\pi]$ et $ON = OM^2$.

c) Montrer que $OH = OM^2$.

d) Construire alors les points N et P tels que le triangle MNP est rectangle en P.