Exercice 1 (3 points)

Répondre par Vrai ou Faux pour chacune des propositions suivantes :

1) Si $1+2i$ est une racine carrée d'un nombre complexe z alors $1-2i$ est l'autre racine carrée de z.

2) Soit ABC un triangle direct, rectangle est isocèle en A alors on a : $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=i$

3) Soit U une suite réelle telle que $\forall n\in\mathbb{N}$ on a : $\frac{1}{n^2}\leq U_n-4\leq\frac{1}{n}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=4$

4) Soit U une suite réelle convergente vers un réel L et telle que :

$\forall n\in\mathbb{N}\,;\,U_n>2$ alors $L>2$

Exercice 2 (5 points)

Soit la suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases}U_0=1\\ U_{n+1}=\frac{U_n}{2+U_n} & \forall n\in\mathbb{N}\end{cases}$

1) Calculer U_1 et U_2 et en déduire que la suite (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2) a) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$ on a : $U_n>0$.

   b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

   c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

3) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n=\frac{U_n}{1+U_n}$

   a) Montrer que la suite (V_n) est géométrique.

   b) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$ on a : $U_n=\frac{1}{2^{n+1}-1}$

   c) Retrouver la limite la suite (U_n)

Exercice 3 (6 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases}f(x)=\frac{x+1-\cos(\pi x)}{x} & si\ \ x<0\\ f(x)=x^3-12x+1 & si\ \ x\geq 0\end{cases}$

1) a) Vérifier que : $\lim\limits_{n\to 0^-}f(x)=1$.

b) Montrer que f est continue en 0.

c) Montrer que $\forall x \in]-\infty\,,0[$ on a : $\frac{x+2}{x} \leq f(x) \leq 1$

d) Déterminer alors $\lim\limits_{n \to -\infty} f(x)$.

2) a) Montrer que l'équation : $f(x) = 0$ admet dans $\left[-\frac{1}{2}\,,0\right]$ au moins une solution α.

b) Montrer que : $\sin(\pi\alpha) = -\sqrt{-\alpha^2 - 2\alpha}$

3) a) Dresser le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,,+\infty[$.

b) Déterminer $f([0\,,2])$ et $f([2\,,+\infty[)$.

4) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $[0\,,2]$ une unique solutiuon β.

b) Déterminer alors le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[0\,,2]$.

Exercice 4 (6 points)

Dans un plan P muni d'un repère orthonormé direct $(O\,,\vec{u}\,,\vec{v}\,)$ on considère les points A, B, C et I d'affixes respectives : $z_A = -2i$; $z_B = 1 + i$; $z_C = 4 + 2i$ et $z_I = 2$.

1) a) Montrer que les points A, B et C sont alignés.

b) Montrer que I est le milieu de $[AC]$.

2) On désigne par D le symétrique du point B par rapport au point I.

a) Déterminer l'affixe z_D du point D.

b) Montrer que $ABCD$ est un losange.

c) $ABCD$ est-il un carré ?

3) Déterminer les ensembles suivants :

$$E = \left\{M(z) \in P / \left|\frac{z-1-i}{z+2i}\right| = 1\right\} \quad F = \left\{M(z) \in P / \frac{z-1-i}{z+2i} \in \mathbb{R}_+^*\right\}$$

4) Déterminer et **construire** l'ensemble :

$$G = \left\{M(z) \in P / arg\left(\frac{2z+4}{2-z}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]\right\}$$