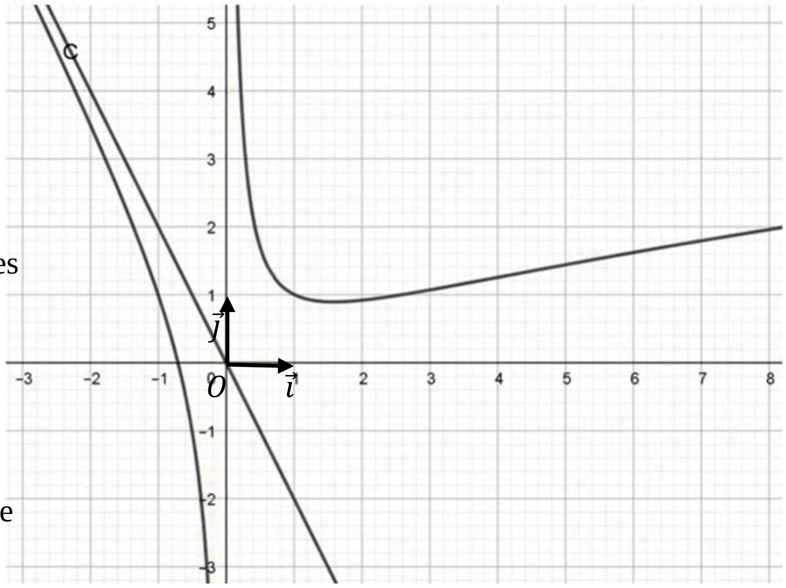
Devoir de contrôle n°1 4ème Mathématiques

Exercice 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On a représenté ci-contre la courbe (C) d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$



* Les droites $D_1 : x = 0$ et $D_2 : y = -2x$ sont des asymptotes à (C)

* La courbe (C) admet une branche parabolique de direction $(O, \vec{\imath})$ au voisinage de $(+\infty)$

* L'équation $f(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}^*$ une unique solution $\alpha = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

1) a) Déterminer graphiquement les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)+2x)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et

b) Calculer les limites suivantes $\lim\limits_{x\to0^-} f\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)-2x}{x\sqrt{-x}}$

c) Déterminer $f(]-\infty, 0[)$ et $f(]0, 1])$

2) a) Déterminer le domaine de définition de $f \circ f$

b) Calculer les limites suivantes $\lim\limits_{x\to-\infty} f\circ f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f\circ f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (f\circ f(x) - f^2(x))$

c) Déterminer $f\circ f\left(\left]-\infty, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right[\right)$

3) Soit g la fonction définie sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ par : $\begin{cases} g(x) = \cos x \,.\, f\left(\frac{1}{\cos x}\right) & si \quad x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right] \\ g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \end{cases}$

a) Montrer que g est continue sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

b) Montrer que l'équation $g(x) = -1{,}9$ admet au moins une solution dans l'intervalle $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right[$

Exercice 2

Le plan complexe est d'un muni repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - (1+i)z + i = 0$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ) : $z^2 - (1+i)e^{i\theta}z + ie^{2i\theta} = 0 \qquad \theta \in [0, 2\pi[$

2) On considère les points M_1 et M_2 d'affixes respectives $z_1 = e^{i\theta}$ et $z_2 = ie^{i\theta}$

Montrer que le triangle OM_1M_2 est direct et isocèle rectangle en O

3) On pose $Z = z_1 + z_2$

a) Ecrire Z sous la forme exponentielle

b) Soit I le milieu du segment $[M_1M_2]$.

Montrer que lorsque θ varie dans $[0\,,2\pi[$, le point I décrit un cercle $\mathcal{C}$ que l'on déterminera

c) Montrer que la droite (M_1M_2) est tangente au cercle $\mathcal{C}$

4) On suppose que $\theta \in [0\,,\pi]$

a) Montrer que $\left(\widehat{\vec{u}\,,\overrightarrow{M_1M_2}}\right) \equiv \theta + \frac{3\pi}{4}\,[2\pi]$

b) En déduire la valeur de θ pour laquelle la droite (M_1M_2) est parallèle à $(O\,,\vec{v})$

c) Construire les points M_1 et M_2 pour la valeur de θ trouvée.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{1+\sqrt{x}\cos x}{x+2} & si\ x \geq 0 \\ \frac{x^2}{4\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)} & si\ \ x < 0 \end{cases}$

1) Montrer que f est continue en 0

a) Montrer que pour tout réel positif x on a : $\frac{1-\sqrt{x}}{x+2} \leq f(x) \leq \frac{1+\sqrt{x}}{x+2}$

b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3) Déterminer, en justifiant la réponse, les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to0^+} f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(1-\sin x)$

4) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $\left]\frac{\pi}{2}\,,\pi\right[$ au moins une solution qu'on notera α

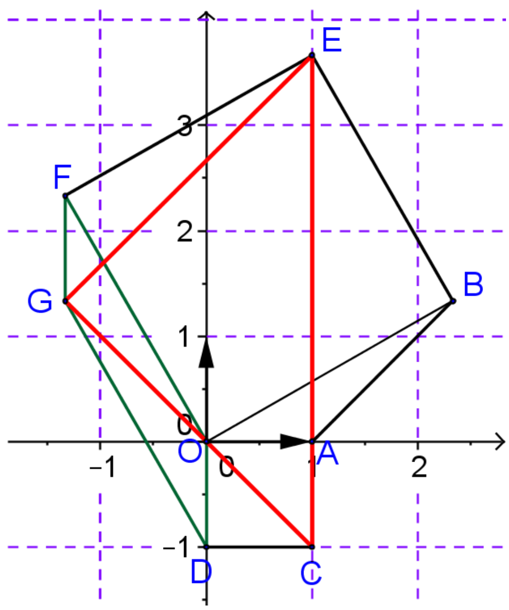
b) Montrer que $\tan\alpha = -\sqrt{\alpha-1}$

Exercice 4

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,,\vec{u}\,,\vec{v})$.

On place un point A d'affixe 1 et un point B d'affixe z_B dont la partie imaginaire est positive

On construit à l'extérieur du triangle OAB deux carrées $ODCA$ et $OBEF$ (directs) et un parallélogramme $OFGD$ comme indiqué sur la figure.



1) Déterminer z_C et z_D des points C et D.

2) a) Montrer que $z_F = iz_B$

b) Déterminer z_E

c) Montrer que $z_G = i(z_B - 1)$.

3) a) Montrer que $\frac{z_E - z_G}{z_C - z_G} = i$

b) En déduire que EGC est un triangle rectangle est isocèle