Devoir de contrôle n°1 4ème Mathématiques (2) (KMH)

Exercice 1

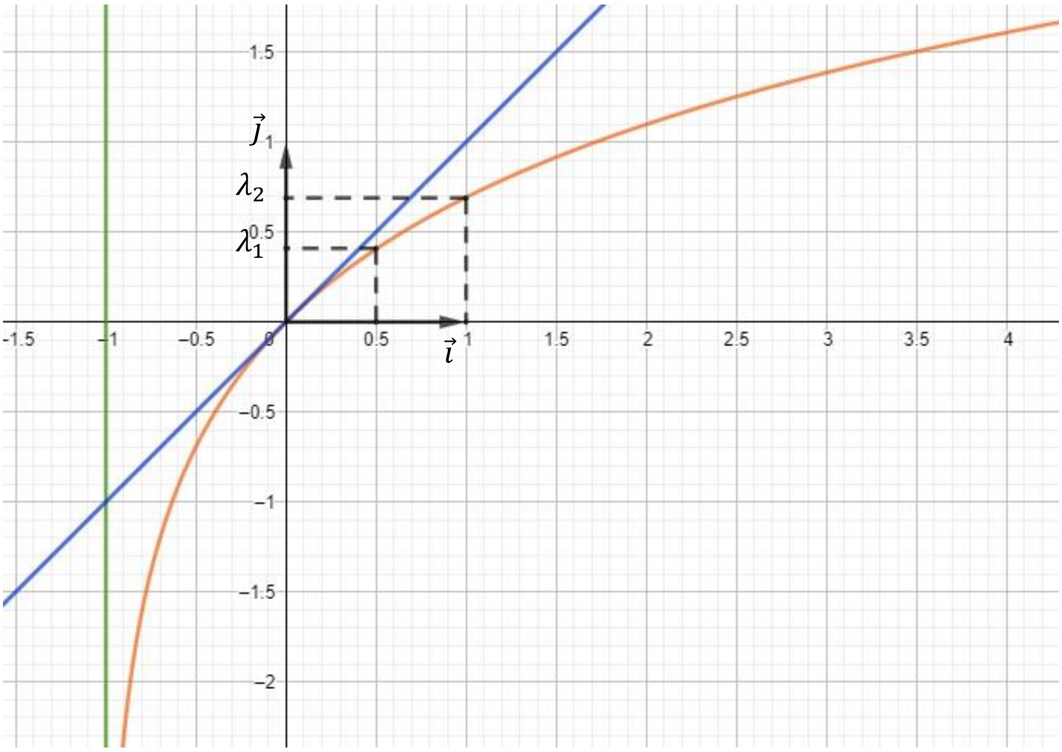
On donne ci-dessous la courbe C_g d'une fonction g dérivable sur $]-1\,,+\infty[$

*** La droite $\Delta: x=-1$ est une asymptote à C_g**

*** La courbe C_g admet une branche parabolique de direction celle de $(O\,,\vec{\imath})$ au voisinage de $+\infty$**

*** La droite $\Delta': y=x$ est tangente à C_g au point d'abscisse 0**

*** On pose $g\left(\frac{1}{2}\right)=\lambda_1$ et $g(1)=\lambda_2$ avec $\frac{1}{4}<\lambda_1<\lambda_2<1$**



1) A partir du graphique déterminer $\lim\limits_{x\to-1^+} g(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}$ et $g'(0)$

2) Soit f la fonction définie sur $[0\,,+\infty[$ par $f(x)=g(\sqrt{x})$ et soit C_f sa courbe représentative

a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{f(x)}{x}=+\infty$ interpréter graphiquement le résultat

c) Sachant que $\forall x\in\,]-1\,,+\infty[$; $g'(x)=\frac{1}{x+1}$, montrer que f est dérivable sur $]0\,,+\infty[$ et que $\forall x\in\,]0\,,+\infty[$; $f'(x)=\frac{1}{2(x+\sqrt{x})}$

d) Dresser le tableau de variation de f

3) a) Montrer que $\forall x\in\left[\frac{1}{4}\,,1\right]$ on a $f'(x)\leq\frac{2}{3}$

b) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet dans $\left[\frac{1}{4}\,,1\right]$ une unique solution α

c) Placer les points de C_f d'abscisses $\frac{1}{4}$; α ; 1 et 4. Tracer C_f (on prendra $\alpha\simeq0,55$)

4) a) Montrer que pour tout $n \geq 1$; l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une unique solution β_n

On définit ainsi sur $\mathbb{N}^*$ une suite réelle (β_n)

b) Montrer que la suite (β_n) est décroissante

c) En déduire que la suite (β_n) est convergente et calculer sa limite

Exercice 2

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = \frac{3}{2}$ et $U_{n+1} = \frac{U_n}{\sqrt{1+U_n}}$: $n \in \mathbb{N}$

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n > 0$

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite

2) Soit (V_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $V_0 = 1$ et $V_{n+1} = \frac{V_n}{U_n}$; $n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que pour tout $n \geq 1$; $V_{n+1} \geq \frac{\sqrt{10}}{3} V_n$

b) En déduire par récurrence que pour tout $n \geq 1$; $V_n \geq \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^{n-1}$ puis déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$

3) Soit la suite (S_n) définie pa $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{V_k{}^2}$; $n \geq 1$

a) Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{V_k{}^2} \leq \frac{45}{2}\left(1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n\right)$

b) En déduire que la suite (S_n) converge vers une limite que l'on déterminera.

Exercice 3

1) Soient les nombres complexes $z_1 = \frac{\sqrt{5}}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = -\frac{\sqrt{5}}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

a) Calculer $z_1 \times z_2$ et $z_1 + z_2$

b) En déduire que pour tout nombre complexe z on a : $(z - z_1)(z - z_2) = z^2 + i\sqrt{3}z - 2$

2) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On a tracé ci-dessous le cercle (C) de centre O et de rayon $\sqrt{2}$ et le point H d'affixe $-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

et on considère les points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2

a) Montrer que M_1 et M_2 appartiennent au cercle (C)

b) Montrer que le point H est le milieu du segment $[M_1M_2]$

c) Construire alors les points M_1 et M_2

3) Soit K le point d'affixe $-i\sqrt{3}$ et soit $z \in \mathbb{C}$ et M et N les points d'affixes respectifs z et z^3

a) Montrer que le point K est le milieu du segment $[MN]$ si et seulement si $z^3 + z + 2i\sqrt{3} = 0$

b) Vérifier que $z^3 + z + 2i\sqrt{3} = (z - i\sqrt{3})(z^2 + i\sqrt{3}z - 2)$

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 + z + 2i\sqrt{3} = 0$

d) Construire alors les points N_1 et N_2 d'affixes respectifs ${z_1}^3$ et ${z_2}^3$ (z_1 et z_2 étant les affixes des points M_1 et M_2)

e) Déterminer l'affixe a d'un point A de l'axe $(O, \vec{v})$ dont le symétrique par rapport au point K est le point B d'affixe a^3