Epreuve : MATHEMATIQUES	**Devoir de synthèse N°2** ************************** **Sujet commun**	**Commissariat régional Tunis 1**
13 Mars 2024	**Durée : 3 h**	**Niveau : 4ème Année** ******** **Section: Sciences expérimentales**

Le sujet comporte 5 pages dont l'annexe page 5 est à rendre avec la copie.

Exercice N°1: (4 points)

Pour chacune des questions suivantes, indiquer sur votre copie le numéro de la question puis répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse :

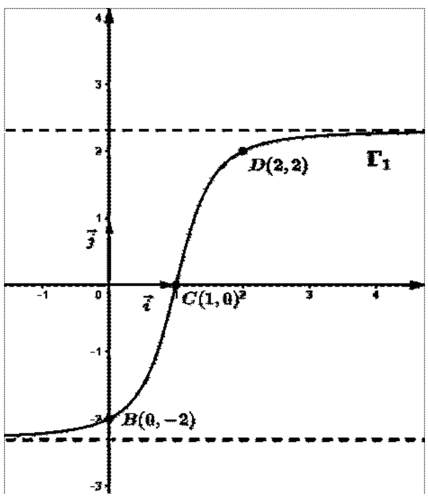
1) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x^2+2x) = 0$

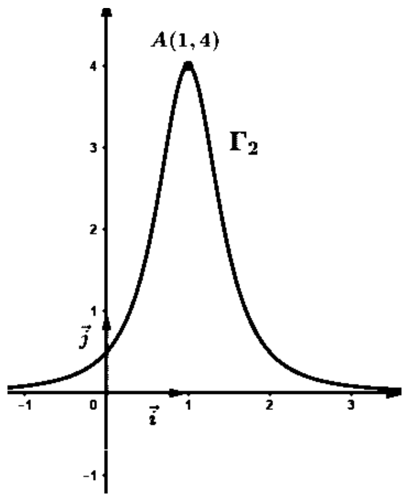
2) Soit F la fonction définie sur IR par : $F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$; On a : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{F(x)}{x} = 1$

3) Soit f une fonction dérivable sur IR telle que sa fonction dérivée f' soit continue sur IR, et G une primitive de f définie sur IR .

On a représenté ci-dessous, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, deux courbes Γ_1 et Γ_2 dont l'une est celle de f et l'autre est celle de G.

.





a) Γ_1 est la courbe représentative de G

b) $\int_0^1 xf'(x)dx = 6$

c) La valeur moyenne sur $[0,2]$ de la fonction g définie par : $g(x) = f(x)G(x)$ est nulle.

Exercice N°2: **(3.5 points)**

Un magasin vend des microscopes. Il s'adresse exclusivement à trois fournisseurs $F_1, F_2 et F_3$. Dans ce magasin, tous les microscopes sont regroupés dans un stock unique.

La moitié des microscopes est produite par F_1, le tiers par F_2 et le reste par F_3

Une étude statistique a montré que :

- 5% des microscopes produits par F_1 présente un défaut de fabrication.
- 2% des microscopes produits par F_2 présente un défaut de fabrication.
- Sur l'ensemble du stock, 4% des microscopes présente un défaut de fabrication.

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles

1) On choisit un microscope au hasard et on considère les événements suivants :

F_1 : « le microscope est produit par F_1 »

F_2 : « le microscope est produit par F_2 »

F_3 : « le microscope est produit par F_3 »

D : « le microscope choisi présente un défaut »

a) Calculer $\mathrm{p}(F_3)$; $\mathrm{p}(F_1 \cap D)$ et $\mathrm{p}(F_2 \cap D)$

b) En déduire que la probabilité que le microscope choisi soit produit par le fournisseur F_3 et présente un défaut est égale à $\frac{1}{120}$

2) Un laborantin achète au hasard un microscope et constate qu'il présente un défaut.

Calculer la probabilité que ce microscope ne soit pas produit par le fournisseur F_3

3) Un laboratoire d'analyses médicales a commandé trois microscopes.

On suppose que le stock des microscopes du magasin est suffisamment grand pour assimiler le choix des microscopes à des tirages indépendants.

Calculer la probabilité de l'évènement :

A: « Au moins un des trois microscopes commandés est défectueux »

Exercice N°3: **(6 points)**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

On donne les points $\mathrm{A}(-1,1,1)$; $\mathrm{B}(1,-1,0)$; $\mathrm{C}(1,0,1)$ et $\mathrm{D}(1,-2,0)$

1) a) Calculer les composantes du vecteur $\vec{\mathrm{u}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{AC}}$

b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan P passant par les points A, B et C est : $x + 2y - 2z + 1 = 0$

2) Vérifier que ABCD est un tétraèdre et calculer son volume

3) Soit Q le plan perpendiculaire au plan P et contenant (AB)

a) Justifier que $\vec{u} \wedge \overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal à Q

b) Montrer alors qu'une équation de Q est : $2x + y + 2z - 1 = 0$

4) Soit Γ l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace vérifiant :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 3 = 0$$

a) Montrer que Γ est la sphère de centre C et passant par A.

b) Déterminer $\Gamma \cap \mathrm{P}$

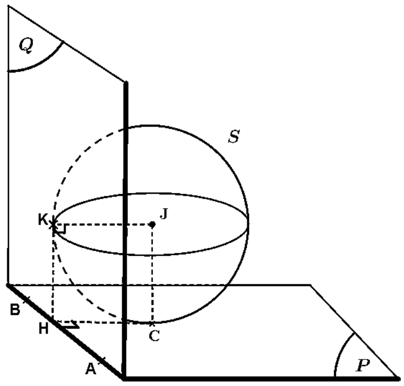
c) Montrer que Q coupe Γ suivant un cercle $\mathcal{C}$ dont on précisera le rayon et les coordonnées de son centre H.

5) Dans cette question, on se propose de déterminer l'ensemble des sphères passant par le point C et tangentes aux plans P et Q.

Pour cela on désigne par :

- J le centre d'une sphère S de cet ensemble.
- K le projeté orthogonal du point J sur Q.

(figure ci-contre)



a) Montrer que le quadrilatère $JCHK$ est un carré.

b) Déduire qu'il existe deux sphères $S_1 et S_2$ passant par C et tangentes aux plans P et Q dont on précisera pour chacune le centre et le rayon

<u>Exercice N°4:</u> (6.5 points)

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on a tracé $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g définie sur $\left[0, +\infty\right[$ par : $\begin{cases} g(x) = \dfrac{x\ln x - x - 1}{(x+1)^2} & \text{si } x \neq 0 \\ g(0) = -1 \end{cases}$

et $\mathscr{C}_h$ la courbe représentative de la fonction h définie sur $\left]0, +\infty\right[$ par : $h(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$

La courbe $\mathscr{C}_g$ coupe l'axe $(O, \vec{i})$ en un seul point d'abscisse $a > 0$. **(Voir annexe)**

1) Par lecture graphique, déterminer le signe de g(x) pour tout $x \geq 0$

2) On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = 1 + \frac{\ln x}{x+1}$

On désigne par $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

a) Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{-g(x)}{x}$

b) Dresser le tableau de variations de f

c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution x_0 dans $]0,+\infty[$

et que $0,2 < x_0 < 0,3$

3) a) Vérifier que $f(x) - h(x) = h(x)\ g(x) \quad (x > 0)$

b) Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_h$

c) Construire alors le point $A(a, f(a))$

4) a) Soit (T) la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

Tracer (T) et $\mathscr{C}_f$ dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

b) On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire en unité d'aire de la partie du plan limitée par $\mathscr{C}_g$, $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = a$

Montrer que : $\mathcal{A} = a$

5) On pose la fonction k définie sur $]0,+\infty[$ par : $k(x) = 1 - f(x)$

et soit la suite (u_n) définie par : $u_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} k(x)dx, (n \geq 1)$

a) Pour $n \geq 2$, donner une interprétation graphique de u_n.

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

c) Montrer que pour tout $x \in]0,1]$ on a : $-\frac{\ln x}{2} \leq k(x) \leq -\ln x$

d) En déduire que : $\frac{1}{2} - \frac{1+ln(n)}{2n} \leq u_n \leq 1 - \frac{1+ln(n)}{n}$; pour $n \geq 1$

e) Montrer alors que la suite (u_n) est convergente.

Donner un encadrement de sa limite ℓ.

Annexe à rendre avec la copie
Nom .... Prénom ………….......... .... Classe : .... N°.......

Exercice N°4 :