Ministère de l'éducation
Commissariat régional
de l'éducation Tunis 1

12/03/2025 | Durée: 3h

Devoir de synthèse commun N°2

Epreuve : Mathématiques

Section : $4^{ème}$ Sciences expérimentales

Le sujet comporte 4 pages dont l'annexe est à rendre avec la copie

Exercice n°1: (6 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $R = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

On considère les points $B(1,0,-1)$, $C(3,2,1)$ et $D(1,0,1)$.

1)a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}$.

b) Déduire que les points B, C et D déterminent un unique plan (P).

c) Montrer qu'une équation du plan (P) est : $x - y - 1 = 0$

2) Soit A(2,1,0) un point de l'espace.

a) Montrer que les points A, B, C et D sont coplanaires.

b) Montrer que le triangle BCD est rectangle en D et A est le centre de son cercle circonscrit (C).

3) Soit I(3,0,0) un point de l'espace et Δ la droite passante par I et perpendiculaire au plan (P).

a) Donner une représentation paramétrique de Δ.

b) Vérifier que Δ est l'axe du cercle (C).

c) Soit N un point de Δ distinct de A. Montrer que BCDN est un tétraèdre.

d) Déterminer le point N de la demi-droite [AI) pour lequel le volume du tétraèdre BCDN égal $\frac{4}{3}$.

4) Soit (S) l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4 = 0$

a) Montrer que (S) est une sphère de centre I et de rayon $\sqrt{5}$.

b) Montrer que la sphère (S) coupe le plan (P) suivant le cercle (C).

Exercice n°2: (4 points)

Le «Text-neck (TXN) » est un syndrome qui englobe toutes les maladies cervicales liées à l'utilisation intensive du téléphone portable. Il s'agit d'une cervicalgie provoquée par une mauvaise position du cou lors du travail ou de l'usage d'un téléphone ou d'un ordinateur. L'équipe de la santé scolaire a effectué une étude statistique sur un échantillon d'élèves dans un lycée, les résultats sont :

- Parmi les élèves affectés par la (TXN), 99% ont le syndrome de l'œil sec.
- Parmi les élèves non affectés par la (TXN), 5% ont le syndrome de l'œil sec.
- 15% des élèves ont le syndrome de l'œil sec.

On choisit au hasard un élève du lycée.

On note les évènements :

A : « l'élève est affecté par la (TXN) ».

S : « l'élève a le syndrome de l'œil sec ».

On désigne par p la probabilité que l'élève soit affecté par la (TXN).

1) Déterminer : $p(S|A)$, p(S) et $p(S|\overline{A})$.
2) Montrer que p = 0,106. (arrondis à 10^{-3} près).
3) Calculer la probabilité que l'élève choisi soit affecté par la (TXN) ou ait le syndrome de l'œil sec.
4) L'élève choisi a le syndrome de l'œil sec, calculer la probabilité qu'il soit affecté par la (TXN). Donner le résultat arrondi à 10^{-3} près.
5) Dans cette question on choisit du lycée n élèves affectés par la (TXN) et on assimile le choix à un tirage successif et avec remise.

   On note p_n la probabilité qu'il y ait au moins un d'entre eux n'ayant pas le syndrome de l'œil sec.

   a) Exprimer p_n en fonction de n.

   b) Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle : $p_n \geq 0{,}98$.

<u>Exercice n°3:</u> (6 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1,+\infty[$ par : $f(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$, et on désigne par (C_f) sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1)a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$, interpréter les résultats graphiquement.

b) Montrer que la droite D : $x = -1$ est une asymptote à (C_f)

2)a) Vérifier que pour tout $x > -1$ $on\ a$: $f'(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$.

b) Dresser alors le tableau de variations de f.

3) On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = -1 + \ln(x)$ et on désigne par (C_g) sa courbe dans le même repère.

a) Etudier les positions relatives des courbes (C_f) et (C_g) sur $]0,+\infty[$.

b) Soit $x > 0$. On considère les points $M(x\,, f(x))$ et $N(x\,, g(x))$.

Justifier que MN= f(x) – g(x) et déterminer la limite de MN lorsque x tend vers plus l'infini.

4)a) Montrer que pour tout $x > 1$ $on\ a$: $f''(x) = \frac{1-x}{(x+1)^3}$

b) En déduire que (C_f) possède un point d'inflexion A que l'on déterminera.

c) Déterminer une équation cartésienne de la tangente (T_A) à (C_f) en A et déduire qu'elle passe par les points $B(-1, g(2))$ et $C(3, g(2)+1)$.

5) Sur l'annexe fournie, on a tracé la courbe (C_g). Construire la tangente (T_A) puis placer le point A et tracer la courbe (C_f) . (Laisser apparente toute trace de construction).

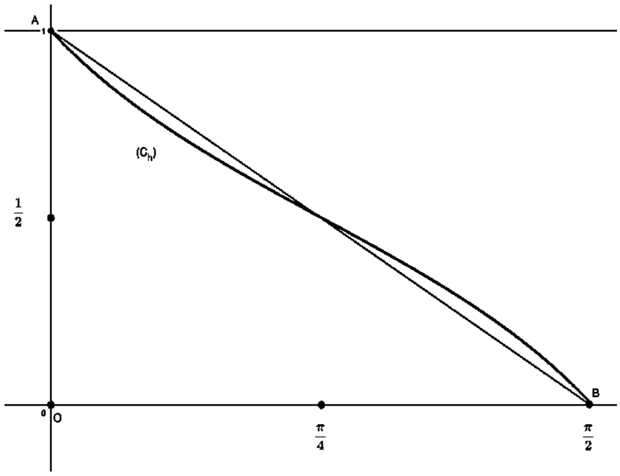
6) On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire (en u.a.) de la partie du plan limitée par (C_f) , (C_g) et les droites d'équations respectives : x = 1 et x = 3.

Montrer que: $\mathcal{A} = \ln\left(\frac{128}{27}\right)$.

<u>Exercice n°4 :</u> (4 points)

On considère la fonction h définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $h(x) = \frac{\cos(x)}{\cos(x)+\sin(x)}$.

Dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ci-dessous, on donne la représentation graphique (C_h) de h, ainsi que la droite (AB) tels que A(0, 1) et $B\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$



1) On désigne par Ω le milieu du segment [AB].

a) Montrer que Ω est un centre de symétrie de (C_h)

. b) Justifier géométriquement que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\cos(t)+\sin(t)} dt = \frac{\pi}{4} .$$

2) On considère les intégrales suivantes:

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(t)}{\cos(t)+\sin(t)} dt \text{ et } B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(t)}{\cos(t)+\sin(t)} dt.$$

a) Calculer $A + B$ et $A - B$ puis déduire la valeur exacte de A.

b) Déduire que l'aire;$\mathcal{A}$ en u.a de la partie du plan limitée (AB) et (C_h) par est égale à $\frac{\pi}{8} - \frac{\ln(2)}{2}$.

Annexe à rendre avec la copie

Nom :………………………… Prénom :……………..………………… Classe :………. N° :…….

Exercice n°3: