Devoir de synthèse n°2

Epreuve : Mathématiques	Direction régionale
Niveau : 4ème SC-Expérimentales	De L'éducation Tozeur
Durée : 3 Heures	A.S :2024/2025

Exercice n°1 : (03 Points)

Pour chaque question ci-après, **cocher** la bonne réponse
Aucune justification n'est demandée.

- Le plan est rapporté à un repère orthonormé$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\int_0^x e^{-t^2}\,dt$
alors sa fonction dérivée seconde f'' est définie par :

a: $f''(x)=-2e^{-x^2}$ b : $f''(x)=e^{-x^2}$ c: $f''(x)=-2xe^{-x^2}$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x\ln(1+e^{-x})$ est égal à :

a : $+\infty$ b : 1 c: -1

3) Soit la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=x-1-\frac{lnx}{x}$.

La valeur moyenne $\bar{g}$ de g sur $[1,3]$ est égale à :

a: $\frac{1}{2}(ln3)^2$ b: $2-\frac{1}{2}ln(3)$ c: $1-\frac{1}{4}(ln3)^2$

4) (C_f) est la représentation graphique de la fonction $x\to e^x$ sur $[ln2,ln4]$.

Le volume de solide engendré par la rotation de(C_f) autour de l'axe des abscisses est égal :

a: $v=6\pi\ \ (u.v)$ b: $v=3\pi\ \ (u.v)$ c: $v=12\pi\ \ (u.v)$

- L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

Soient les points $A(1,-1,2)$ et $B(-3,4,1)$

5) Soit (S) la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2=16$:

a: B est à l'intérieur de (S) b: B est à l'extérieur de (S) c : B appartient à (S)

6) L'ensemble des points M de l'espace tel que $\|2\overrightarrow{AM}-3\overrightarrow{BM}\|=2$:

a: est un plan b: est une sphère c : est une droite

Exercice n°2 : (06 Points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$,

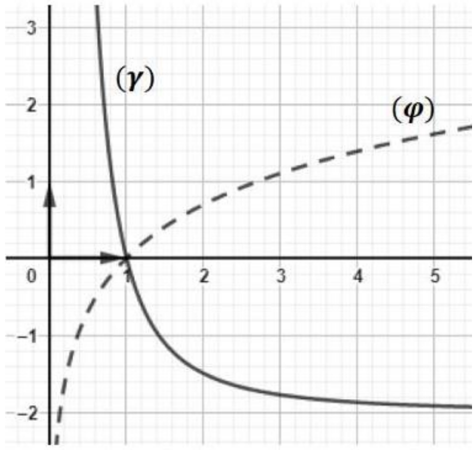
I) Dans la figure ci-contre :

$(\boldsymbol{\gamma})$ est la courbe de la fonction $x \to 2(\frac{1}{x^2} - 1)$ et $(\boldsymbol{\varphi})$ est celle de la fonction $x \to lnx$

Les courbes $(\boldsymbol{\gamma})$ et $(\boldsymbol{\varphi})$ se coupent en un point d'abscisse 1

On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$

Par $g(x) = \frac{2}{x^2} - lnx - 2$



1) Par lecture graphique préciser la position

Relative de $(\boldsymbol{\gamma})$ par rapport à $(\boldsymbol{\varphi})$ sur $]0,+\infty[$

2) En déduire le signe $g(x)$ sur $]0,+\infty[$

II) Soit la fonction $\boldsymbol{f}$ définie sur $]0,+\infty[$

$f(x) = \frac{2x^2+x-\ln(x)+1}{x}$

et (C_f) est sa représentation graphique

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ puis Interpréter graphiquement

2) a- Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f'(x) = \frac{g(\frac{1}{x})}{x^2}$

b- Dresser le tableau de variations de f

3) a- Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} [f(x) - 2x]$. Que peut-on déduire ?

b- Etudier la position la position relative de (C_f) par rapport à la droite (Δ): $y = 2x + 1$

4) Tracer (C_f) et (Δ)

5) Soit la suite (U_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $U_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \big(f(x) - (2x+1)\big)\, dx$

a- Calculer U_n en fonction de n puis en déduire la nature de la suite (U_n)

b- Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C_f) ,la droite (Δ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e^2$.

Vérifier que $A = U_0 - U_1$ (u.a)

Exercice n°3 : (05,5 Points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$

On donne les points $A(0,1,1)$; $I(-1,0,2)$ et le vecteur $\vec{u} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$

Soit le plan Q d'équation $Q : 2y - z - 3 = 0$

1) a- Ecrire une équation cartésienne de la sphère (S) de centre I et de rayon $\sqrt{5}$

b- Donner une représentation paramétrique de la droite (D) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$

c- Montrer que la droite (D) coupe la sphère (S) en deux points dont l'un est $B(1,0,1)$

2) a- Soit P le plan tangent à (S) en B .

Montrer qu'une équation cartésienne du plan P est $P :\ -2x + z + 1 = 0$

b- Montrer que le plan Q est tangent à (S) en un point C que l'on déterminera

3) a- Montrer que les plans P et Q sont sécants et donner une représentation paramétrique de leur intersection (Δ)

b- Montrer que la droite (Δ) est incluse dans le plan médiateur R du segment $[BC]$

4) Soit (S_m) l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tel que :

$x^2 + y^2 + z^2 - 2mx - 2z + m^2 + \frac{8}{9} = 0$; $m \in \mathbb{R}$

a- Montrer que pour tout $m \in \mathbb{R}$, (S_m) est une sphère dont on précisera le centre I_m et le rayon R_m

b- Montrer que le plan P coupe la sphère (S_1) suivant un cercle (Γ) dont on déterminera Le centre et le rayon

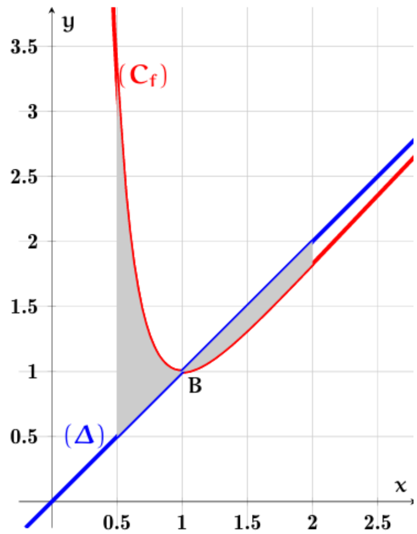
Exercice n°4 : (05,5 Points)

I) Dans la figure ci-contre le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2\ cm$.(C_f) est la représentation graphique de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$,par $f(x) = x - \frac{lnx}{x^2}$

Et la droite (Δ) d'équation $y = x$ est une asymptote à (C_f) Au voisinage de $+\infty$.

(C_f) et (Δ) se coupent en un point $B(1,1)$

- On pose pour tout $x \in]0, +\infty[$, $G(x) = \int_1^x \frac{lnt}{t^2}\,dt$
- On note A l'aire de la partie du plan Limitée par (C_f) , (Δ) et les droites d'équations $x = \frac{1}{2}$ et $x = 2$



1) A l'aide une intégration par parties, montrer que $G(x) = 1 - \frac{1}{x}(1 + lnx)$

2) En déduire A en cm^2

II) Considérons la suite (U_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $U_n = \int_n^{n+1} (e^{2-x})\ dx$

1) a- Vérifier que $U_0 = e^2 - e$ puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n > 0$

b- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_n = e^{1-n}\,(e - 1)$

2) a- Etudier le sens de variation de la suite (U_n)

b- En déduire que la suite (U_n) est convergente

3) a- Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $e^n U_n = e^2 - e$

b- Calculer alors la somme S_n tel que $S_n = e^{1445}U_{1445} + e^{1446}U_{1446} + \dots + e^{2025}U_{2025}$