

Ministère de l'éducation *** Commissariat régional de l'éducation de Tataouine	Compétition régionale de mathématiques	
	Section : Sciences expérimentales	
	Epreuve : Mathématiques	
	Session : Avril 2023	Durée : 3 heures

Exercice 1 (4.5points)

Pour une population infectées par le virus omicron, des statistiques ont montré que :

- Parmi les personnes atteintes par cette maladie, 90% ont un test PCR positif.
- 97,8% des personnes non atteintes par cette maladie ont un test PCR négatif.

On choisit au hasard une personne de cette population. Soient les événements :

O : « Être porteur du virus omicron » et T : « Avoir un test PCR positif »

A. Dans cette partie, on suppose que :

la probabilité d'avoir un test PCR positif est de 0,1976.

1)a) Déterminer $p(T)$, $p(T/O)$ et $p(\bar{T}/\bar{O})$.

b) Calculer $p(T/\bar{O})$.

2)a) Montrer que $p(O) = 0,2$.

b) Cinq personnes sont choisis au hasard et d'une façon indépendantes. Calculer la probabilité qu'il y a une seule personne porteur de cette maladie.

3) On dit que le test PCR est fiable lorsqu'il est conforme à l'état de la personne soumise au test. Calculer la probabilité de l'événement : F « le résultat du test PCR est fiable ».

4) Calculer la probabilité des événements suivants : (Arrondir les résultats à 10^{-4} près)

E « la personne est porteuse de virus sachant que le test est positif ».

F « La personne est saine lorsque le test est négatif ».

B. Dans cette partie, on suppose que la probabilité d'avoir un test PCR positif est inconnue.

1) On pose $p(O) = p$. Exprimer $p(O/T)$ en fonction de p .

2) Déterminer l'ensemble des valeurs de p pour que $p(O/T) \geq 0,98$.

Exercice2 (3.5 points)

Soit n un entier naturel. On pose $I_0 = \int_0^1 \sin(\pi x) dx$ et $I_n = \int_0^1 x^n \sin(\pi x) dx$ pour $n \geq 1$.

- 1) Calculer I_0 et I_1 .
- 2) Montrer que la suite (I_n) est décroissante et déduire qu'elle est convergente.
- 3) Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a : $I_n \leq \frac{1}{n+1}$ puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
- 4) A l'aide d'une double intégration par partie, Montrer que : $\pi^2 I_{n+2} = \pi - (n+1)(n+2)I_n$
- 5) a) Déduire la valeur de I_2
b) Montrer que $\int_0^1 (x-1)^2 \sin(\pi x) dx = \frac{\pi^2 - 4}{\pi^3}$

Exercice3 (5.5 points)

- 1) a) Vérifier que $(\sqrt{2} - i\sqrt{2})^2 = -4i$
b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation. $z^2 + 2z + 1 + i = 0$
- 2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Dans l'annexe ci-jointe **figure 1**,
(C) est le cercle de centre O et de rayon 1 et A est le point d'affixe $Z_A = -1$
a) Construire les points B et C d'affixes respectives : $Z_B = e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $Z_C = -Z_B$.
b) Écrire la forme algébrique de Z_B
3) Soient les points M_1 et M_2 du plan d'affixes respectives :
$$Z_1 = \frac{-2 - \sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } Z_2 = \frac{\sqrt{2} - 2}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

a) Vérifier que A est le milieu du segment $[M_1 M_2]$.
b) Montrer que OAM₁B est un losange.
c) Construire ,alors, les points M_1 et M_2
d) Montrer que $\left(\vec{u}, \wedge \overrightarrow{OM_1} \right) \equiv \frac{7\pi}{8} [2\pi]$
e) Montrer que : $OM_1 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$. En déduire la valeur exacte de $\cos \frac{7\pi}{8}$.
- 4) Soit M un point du plan d'affixe $Z_M = e^{i\theta}$, avec $\theta \in \left] -\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right]$.
a) Vérifier que M appartient au cercle (C) puis justifier que le triangle MBC est rectangle en M.
b) Soit A l'aire du triangle MBC. Montrer que $A = \frac{1}{2} |i + e^{i2\theta}|$

c) Vérifier que $e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)} \cdot \left(e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)} + e^{-i\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)} \right) = i + e^{i2\theta}$

d) En déduire que $A = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$

e) Déterminer la valeur de θ pour laquelle A est maximale.

Exercice4 (6,5 points)

Dans l'annexe ci-jointe, **figure 2**, on a tracé dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$:

- C_g la courbe de la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x + (x-2)\ln x$.
- C_h la courbe de la fonction h définie sur $]0, +\infty[$ par : $h(x) = ax + 1 + b\ln x$ où a et b deux réels
- Δ la droite d'équation $y = -x$

1) Par lecture graphique déterminer :

a) le signe de $g(x)$ et de $h(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.

b) $h(1)$ et $h'(1)$

2) a) Vérifier que pour tout $x \in]0, +\infty[$: $h(x) = -x + 1 + \ln x$.

b) Montrer que C_h admet une branche parabolique de direction celle de la droite Δ .

c) Calculer l'aire $\mathcal{A}_1$ de la partie du plan limitée par les courbes C_h, Δ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = e$

3) On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = -1 + (\ln(x))^2 - x \ln(x)$.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$. Interpréter graphiquement.

4) a) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = -\frac{g(x)}{x}$.

b) Dresser alors le tableau de variation de f .

5°) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]0, +\infty[$ une unique solution α et que $0,4 < \alpha < 0,5$.

b) Justifier que la droite Δ est la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 1.

c) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$ $f(x) + x = (\ln x - 1) h(x)$.

d) Déduire la position relative de C_f et Δ .

e) Tracer C_f dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

6) On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire (en unité d'aire) de la partie du plan limitée par C_f et C_g et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

a) Montrer que : $\int_1^e g(x) dx = -[x f(x)]_1^e + \int_1^e f(x) dx$.

b) Calculer alors $\mathcal{A}$.

Annexe à rendre avec la copie

Nom et prénom.....

classe.....

Lycée.....

Figure 1

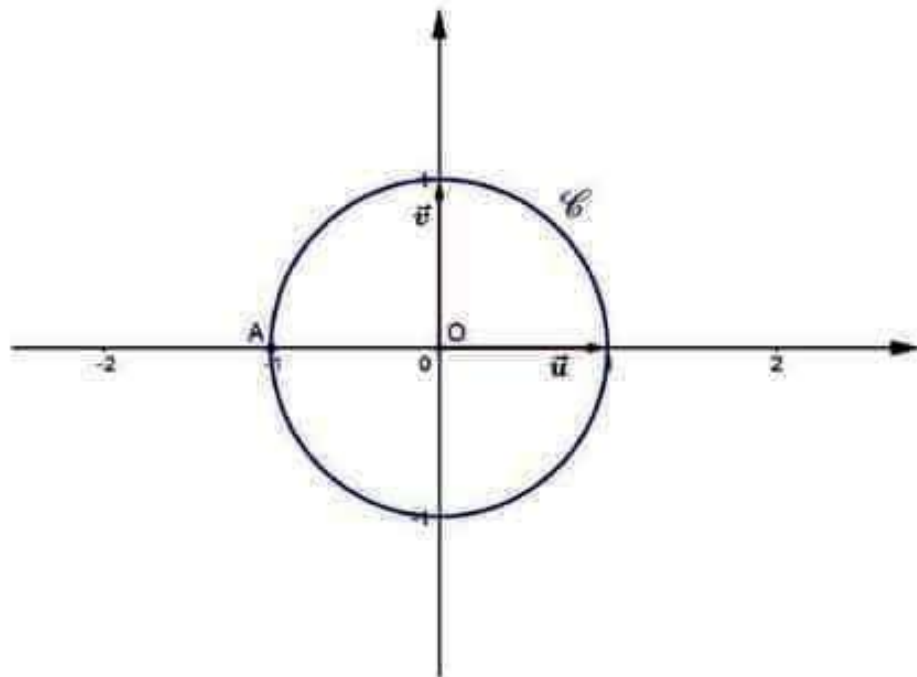


Figure2

