Délégation Régionale de Sousse	**DEVOIR DE SYNTHESE N°2**	**Niveau** : $4^{ème}$Science **Date** :13 – 03 – 2024
Année Scolaire : 2023/2024	Mathématiques	**Durée** : 3 heures

<u>Exercice n °1</u>*:* (4 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1/L'espace est muni d'un repère orthonormé

Soit les droites

$$\Delta : \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 2 - \alpha \\ z = 1 + 2\,\alpha \end{cases} , \quad \alpha \in IR \qquad et \qquad \Delta' : \begin{cases} x = -1 + 2\,\beta \\ y = -1 \\ z = 1 + \beta \end{cases} , \ \beta \in IR.$$

Alors :

a/ Δ et Δ' sont parallèles.

b/ Δ et Δ'sont sécantes.

c/ Δ et Δ' ne sont pas coplanaires.

2/ Soit A et B deux événements de l'univers E tels que p (A) = 0.25, p (B) = 0.52 et p (AU B) = 0.65. Alors :

a/ A et B sont deux événements indépendants.

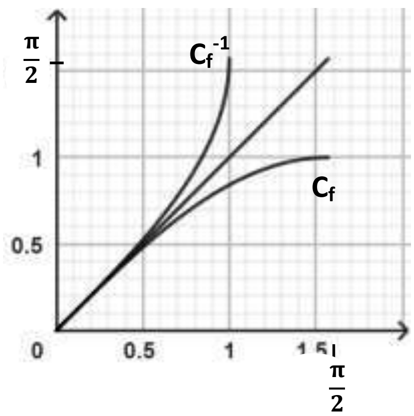
b/ p (B / A) = 0,48 .

c/ p (A / B) = 0,5.

3/ Soit la fonction f définie sur [0, $\frac{\pi}{2}$] par f (x) = sin (x).

On désigne par (Cf) sa courbe et (Cf^{-1}) la courbe de sa réciproque dans un repère orthonormé.

L'intégrale $\int_0^1 f^{-1}(t)dt$ est égale à



a/ 1 b/ $\frac{\pi}{2} - 1$ c/ $\frac{\pi}{2} + 1$

4/ Soit la suite U définie sur $\mathbb{N}$ *par* $U_n = \int_{-\pi}^{\pi} (-1)^n \cos(x)\ dx$

a/ U est strictement croissante b/ U est strictement décroissante c/ U est constante

Exercice n °2: (4 points)

Au secrétariat d'un lycée tous les dossiers des élèves sont regroupés dans une même armoire .

On sait que :

20 % des élèves du lycée sont internes ; 50% sont demi-pensionnaires et 30% sont externes.

- 60 % des internes sont des garçons
- 50 % des demi-pensionnaires sont des filles
- 27 % des dossiers sont ceux des filles externes

(Dans cet exercice on donnera les résultats arrondies au millième)

1- On extrait au hasard un dossier de l'armoire .On considère les événements :

I : « le dossier extrait est celui d'un élève interne »

D : « le dossier extrait est celui d'un élève demi-pensionnaire »

E : « le dossier extrait est celui d'un élève externe »

F : « le dossier extrait est celui d'une fille »

a-Construire un arbre pondéré décrivant cette situation

b-Montrer que $p(F) = 0,6$

c- Le dossier extrait est celui d'une fille. Quelle est la probabilité qu'il soit un dossier d'une demi - pensionnaire ?

d – Calculer $p(\overline{F} \cap I)$

2- On extrait $\boldsymbol{n}$ dossiers de l'armoire, successivement en remettant à chaque fois le dossier extrait.

a-Calculer la probabilité $\boldsymbol{p_n}$ d'obtenir au moins un dossier d'un garçon interne.

b-Trouver la plus petite valeur de $\boldsymbol{n}$ tel que $\boldsymbol{p_n} \geq 0,98$

Exercice n °3: (5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

Soit les points $I\ (2,0,-3)$ et $J\ (2\,,-3\,,-3\,)$ et le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$. On considère l'ensemble (S) des points M (x, y, z) de l'espace tels que $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6z + 7 = 0$.

1/ Montrer que (S) est la sphère de centre I et de rayon R = $\sqrt{6}$.

2/ Soit Δ la droite passant par le point J et de vecteur directeur $\vec{u}$.

a- Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ .

b- Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{IJ} \wedge \vec{u}$.

c- Soit K (1 , − 2, −2) . Montrer que la droite Δ est tangente à (S) en K.

3/Soit P et Q les plans d'équations cartésiennes $P : x - y - z - 8 = 0$ et $Q : x - y - z + 10 = 0$.

a - Montrer que le plan P coupe la sphère suivant un cercle (C) dont on précisera le centre H et le rayon r.

b - Vérifier que Q et P sont strictement parallèles

c - Déterminer $Q \cap S$.

4/ On donne les points A (0 , 0 , 1) , B (1 , 2 ,0) et C (1, 1 , 1).

a- Montrer que pour tout point M (x , y , z) de l'espace on a $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AM} = x - y - z + 1$.

b- Déterminer l'ensemble des points M de la sphère (S) pour lesquels ABCM est un tétraèdre de volume égal à $\frac{3}{2}$.

<u>**Exercice n°4**</u> : (7 points)

Soit la fonction f définie sur]0,+∞[par : $f(x) = 1 + \ln\left(\frac{x}{1+x^2}\right)$

et (Cf) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé

1/ **a-** Calculer $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ .Interpréter le résultat graphiquement

b- Vérifier que $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$

c- Montrer que, *pour tout* $x > 0$, $f(x) = 1 - \ln(x) - \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$

d- Déduire $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter le résultat graphiquement

2/ **a-** Montrer que : $f'(x) = \frac{1-x^2}{x+x^3}$, et dresser le tableau de variation de f sur]0,+∞[

b- Montrer que l'équation : f(x) = 0 admet exactement deux solutions α et β tel que $\alpha < 1 < \beta$

c- Sur la feuille annexe, On donne les points $A(\alpha, 0)$, $B(\beta, 0)$ et $C(1, 1 - \ln(2))$. Tracer (Cf)

3/ Soit F la fonction définie sur IR par : $F(x) = \int_1^x \frac{t^2}{1+t^2}dt$ et $G(x) = F(\tan(x))$, $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

a- Vérifier que F est dérivable sur IR et calculer F '(x)

b- Montrer que $G'(x) = \tan^2(x)$ pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

c- Déduire que : $G(x) = \tan(x) - x + \frac{\pi}{4} - 1$ pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

d- Calculer alors $a = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{t^2}{1+t^2}dt$

4/ Soit $I = \int_1^{\sqrt{3}} \ln(1+t^2)dt$

a- Montrer par intégration par parties que : $I = (2\sqrt{3} - 1)\ln(2) - 2a$

b- Déduire que $I = (2\sqrt{3} - 1)\ln(2) + 2(1 - \sqrt{3}) + \frac{\pi}{6}$

c- Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie limite par (Cf) et l'axe des abscisses et les droites x = 1 et x = $\sqrt{3}$

Calculer $\mathcal{A}$.

Nom et Prénom :……………………………………………………………………………………………Classe : ……………

Annexe à rendre :