Délégation Régionale de Sousse	DEVOIR DE SYNTHESE N°2	Niveau : 4 Sciences Expérimentales
		Date : 12- 03-2025
Année scolaire : 2024/2025	Mathématique	Durée : 3 heures

Exercice n °1: (3pts)

Recopier le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse exacte.

Aucune justification n'est demandée.

1/ L'espace est muni d'un repère orthonormé, A (1,-1,2) et B (3,0 ,1)

(E) : l'ensemble des points équidistants aux points A et B est le plan dont une équation :

a/ $2x + y - z - 2 = 0$ b/ $2x + y - z = 0$ c/ $2x - y + 3z - 9 = 0$

2/ Un dé cubique truqué est tel que la probabilité de sortie d'un numéro est proportionnelle à ce numéro. Alors la probabilité de l'évènement : « Le numéro obtenu est 2 ou 3 » est

a/ $\frac{5}{6}$ b/ $\frac{5}{21}$ c/ $\frac{1}{3}$

3/ Soient deux évènements A et B vérifiant : p(A) = 0,4 et p(B) = 0,3

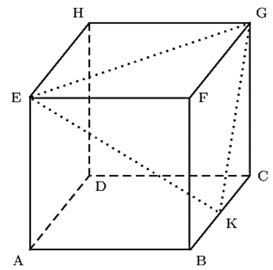
sachant que A et B sont incompatibles. Alors p(A∪B)

a/ 0,12 b/ 0,58 c/ 0,7

4/ Soit f une fonction dérivable sur IR et f ' est continue sur IR . Alors $\int_0^1 \left(x f'(x) + f(x)\right) dx =$

a/ $f'(1) + f(1) - f(0)$ b/ $f(1) - f(0)$ c/ $f(1)$

Exercice n °2: (6 pts)



On considère un cube ABCDEFGH d'arrête 1 et on appelle K le milieu du segment [BC].

L'espace est munit du repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$

1/ Préciser les coordonnées des points E, F, G et K

2/a/ Montrer que $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal du au plan (EGK).

b/ Déduire que le plan (EGK) admet pour équation cartésienne : $2x - 2y + z - 1 = 0$

3/a/ Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) orthogonale au plan (EGK) passant par F

b/ Montrer que I le projeté orthogonal de F sur le plan (EGK) à pour coordonnées $\left(\frac{5}{9}, \frac{4}{9}, \frac{7}{9}\right)$

c/ Calculer l'aire du triangle EGK .En déduire que le volume du tétraèdre EFGK est égal à $\frac{1}{6}$

4/ Soit (S) l'ensemble des points M(x, y, z) tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 2 = 0$.

a/ Montrer que (S) est une sphère dont on déterminera son centre et son rayon R.

b/ Montrer que l'intersection du plan (EGK) et la sphère (S) est un cercle de centre I et rayon r l'on déterminera

c/ Soit M_α un point de l'espace de coordonnées (1+2 α ,-2 α , 1+ α) ou α un réel

Déterminer α pour que M_α un point de (S)

d/ En déduire qu'il existe deux plans parallèles à P et tangentes à (S) dont on précisera leurs équations cartésiennes.

Exercice n °3: (4 pts)

Pour l'année scolaire, un professeur de mathématiques propose aux élèves de sa classe le choix entre deux types d'accompagnement : « Approfondissement » ou « Ouverture culturelle ».

Chaque semaine, un élève doit s'inscrire dans un et un seul des deux accompagnements proposés.

La première semaine, 20% des élèves de la classe ont choisi « Approfondissement » et tous les autres ont choisi « Ouverture culturelle ». On admet que

- 25 % des élèves ayant choisi « Ouverture culturelle » une certaine semaine s'inscrivent en « Approfondissement » la semaine suivante ;
- 40 % des élèves ayant choisi « Approfondissement » une certaine semaine s'inscrivent en « Ouverture culturelle » la semaine suivante.

On s'intéresse à l'évolution de la répartition des élèves de cette classe entre les deux types d'accompagnement au fil des semaines. Chaque semaine, on interroge au hasard un élève de la classe.

Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'évènement « l'élève a choisi

« Approfondissement »

la n-ième semaine » et p_n la probabilité de l'évènement A_n

1/ A l'aide d'un arbre de probabilité.

a/ Montrer que $p_2 = p(A_2) = 0{,}32$

b/ Montrer que : $p_{n+1} = \frac{7}{20}p_n + \frac{1}{4}$, $n \geq 2$

2/ On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = p_n - \frac{5}{13}$

a/ Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on déterminera sa raison.

b/ En déduire pour tout entier naturel n non nul l'expression de u_n en fonction de n.

c/ Déterminer la limite de la suite (p_n) et interpréter ce résultat.

Exercice n °4: (7 pts)

On considère la fonction g définie sur]0,+∞[par : $g(x) = -1 + \frac{1}{x} - 2\ln(x)$

1/ a/ Montrer que la fonction g est strictement décroissante sur]0,+∞[.

b/ Calculer g(1) et en déduire le signe de g(x) pour x >0

Soit la fonction f définie sur [0,+∞[par : $f(x) = \begin{cases} x - x^2\ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

2/ a/ Montrer que f est continue à droite en 0.

b/ Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x}$, interpréter le résultat graphiquement

c/ Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter le résultat graphiquement

d/ Montrer que pour tout x > 0 , $f'(x) = x\,g(x)$ et dresser le tableau de variation de f.

e/ Montrer que l'équation : f(x) =0 admet unique solution α dans]1,2[

f/ Tracer (Cf) la courbe de f (**Voir Annexe**)

3/a/ En utilisant une intégration par parties

Montrer que $\int_1^\alpha x^2\ln(x)\,dx = \frac{1}{9}(3\alpha^3\ln(\alpha) - \alpha^3 + 1) = \frac{1}{9}(-\alpha^3 + 3\alpha^2 + 1)$

b/ Déterminer $\mathcal{A}$ l'aire de la partie limitée par (Cf), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$

4/ Soit la fonction h est la restriction de f sur [1,+∞[

a/ Montrer que h réalise une bijection de [1,+∞[sur un intervalle J que l'on précisera

b/ Tracer ($C_{h^{-1}}$) la courbe de la réciproque de h dans le même repère

c/ Calculer $\int_0^1 h^{-1}(x)\,dx$

5/ On définit la suite (u_n) par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$

a/ Montrer par récurrence pour tout $n \geq 0$ que : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$

b/ Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Annexe à rendre

Nom et Prénom :…………………………………………………… ……………Classe : ……………

Exercice 4 :