Devoir de synthèse n°2

Epreuve : Mathématiques
Niveau : 4ème SC-Expérimentales
Durée : 3 Heures

Direction régionale
De L'éducation Tozeur
A.S :2024/2025

Exercice n°1 : (03 Points)

Pour chaque question ci-après, **cocher** la bonne réponse
Aucune justification n'est demandée.

- Le plan est rapporté à un repère orthonormé$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\int_0^x e^{-t^2}\,dt$
alors sa fonction dérivée seconde f'' est définie par :

a: $f''(x)=-2e^{-x^2}$ b : $f''(x)=e^{-x^2}$ c: $f''(x)=-2xe^{-x^2}$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x\ln(1+e^{-x})$ est égal à :
a : $+\infty$ b : 1 c: -1

3) Soit la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=x-1-\frac{lnx}{x}$.

La valeur moyenne $\bar{g}$ de g sur $[1,3]$ est égale à :

a: $\frac{1}{2}(ln3)^2$ b: $2-\frac{1}{2}ln(3)$ c: $1-\frac{1}{4}(ln3)^2$

4) (C_f) est la représentation graphique de la fonction $x\to e^x$ sur $[ln2,ln4]$.

Le volume de solide engendré par la rotation de(C_f) autour de l'axe des abscisses est égal :

a: $v=6\pi\ \ (u.v)$ b: $v=3\pi\ \ (u.v)$ c: $v=12\pi\ \ (u.v)$

- L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

Soient les points $A(1,-1,2)$ et $B(-3,4,1)$

5) Soit (S) la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2=16$:

a: B est à l'intérieur de (S) b: B est à l'extérieur de (S) c : B appartient à (S)

6) L'ensemble des points M de l'espace tel que $\|2\overrightarrow{AM}-3\overrightarrow{BM}\|=2$:

a: est un plan b: est une sphère c : est une droite

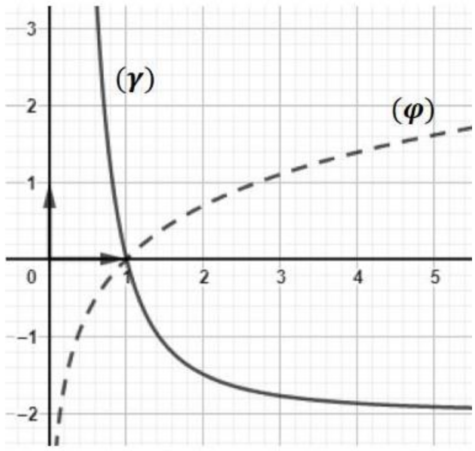
Exercice n°2 : (06 Points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$,

I) Dans la figure ci-contre :

$(\boldsymbol{\gamma})$ est la courbe de la fonction $x \to 2(\frac{1}{x^2} - 1)$ et $(\boldsymbol{\varphi})$ est celle de la fonction $x \to lnx$

Les courbes $(\boldsymbol{\gamma})$ et $(\boldsymbol{\varphi})$ se coupent en un point d'abscisse 1



On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$

Par $g(x) = \frac{2}{x^2} - lnx - 2$

1) Par lecture graphique préciser la position

Relative de $(\boldsymbol{\gamma})$ par rapport à $(\boldsymbol{\varphi})$ sur $]0,+\infty[$

2) En déduire le signe $g(x)$ sur $]0,+\infty[$

II) Soit la fonction $\boldsymbol{f}$ définie sur $]0,+\infty[$

$f(x) = \frac{2x^2+x-\ln(x)+1}{x}$

et (C_f) est sa représentation graphique

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis Interpréter graphiquement

2) a- Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f'(x) = \frac{g(\frac{1}{x})}{x^2}$

b- Dresser le tableau de variations de f

3) a- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - 2x]$. Que peut-on déduire ?

b- Etudier la position la position relative de (C_f) par rapport à la droite (Δ): $y = 2x + 1$

4) Tracer (C_f) et (Δ)

5) Soit la suite (U_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $U_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \big(f(x) - (2x+1)\big)\, dx$

a- Calculer U_n en fonction de n puis en déduire la nature de la suite (U_n)

b- Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C_f) ,la droite (Δ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e^2$.

Vérifier que $A = U_0 - U_1$ (u.a)

Exercice n°3 : (05,5 Points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$

On donne les points $A(0,1,1)$; $I(-1,0,2)$ et le vecteur $\vec{u} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$

Soit le plan Q d'équation $Q : 2y - z - 3 = 0$

1) a- Ecrire une équation cartésienne de la sphère (S) de centre I et de rayon $\sqrt{5}$

b- Donner une représentation paramétrique de la droite (D) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$

c- Montrer que la droite (D) coupe la sphère (S) en deux points dont l'un est $B(1,0,1)$

2) a- Soit P le plan tangent à (S) en B .

Montrer qu'une équation cartésienne du plan P est $P :\ -2x + z + 1 = 0$

b- Montrer que le plan Q est tangent à (S) en un point C que l'on déterminera

3) a- Montrer que les plans P et Q sont sécants et donner une représentation paramétrique de leur intersection (Δ)

b- Montrer que la droite (Δ) est incluse dans le plan médiateur R du segment $[BC]$

4) Soit (S_m) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tel que :

$x^2+y^2+z^2-2mx-2z+m^2+\frac{8}{9}=0$; $m\in\mathbb{R}$

a- Montrer que pour tout $m\in\mathbb{R}$, (S_m) est une sphère dont on précisera le centre I_m et le rayon R_m

b- Montrer que le plan P coupe la sphère (S_1) suivant un cercle (Γ) dont on déterminera Le centre et le rayon

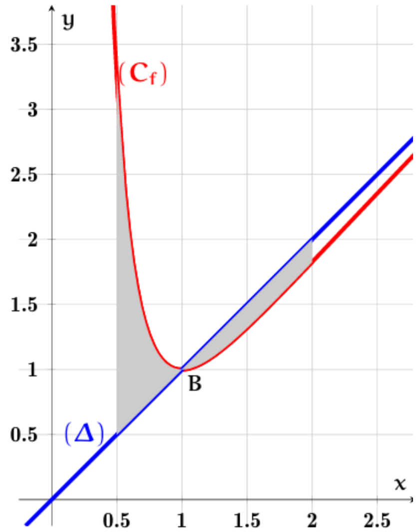
<u>Exercice n°4 :</u> (05,5 Points)

I) Dans la figure ci-contre le plan est muni d'un repère orthonormé$(O,\vec{i},\vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2\ cm$.(C_f) est la représentation graphique de la fonction f définie sur $]0,+\infty[$,par $f(x)=x-\frac{lnx}{x^2}$

Et la droite (Δ) d'équation $y=x$ est une asymptote à (C_f) Au voisinage de $+\infty$.

(C_f) et (Δ) se coupent en un point $B(1,1)$

- On pose pour tout $x\in]0,+\infty[$, $G(x)=\int_1^x \frac{lnt}{t^2}\,dt$
- On note $\boldsymbol{A}$ l'aire de la partie du plan Limitée par (C_f) , (Δ) et les droites d'équations $x=\frac{1}{2}$ et $x=2$



1) A l'aide une intégration par parties, montrer que $G(x)=1-\frac{1}{x}(1+lnx)$

2) En déduire $\boldsymbol{A}$ en cm^2

II) Considérons la suite (U_n) définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par : $U_n=\int_n^{n+1}(e^{2-x})\,dx$

1) a- Vérifier que $U_0=e^2-e$ puis montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $U_n>0$

b- Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $U_n=e^{1-n}(e-1)$

2) a- Etudier le sens de variation de la suite (U_n)

b- En déduire que la suite (U_n) est convergente

3) a- Vérifier que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $e^nU_n=e^2-e$

b- Calculer alors la somme S_n tel que $S_n=e^{1445}U_{1445}+e^{1446}U_{1446}+\dots+e^{2025}U_{2025}$