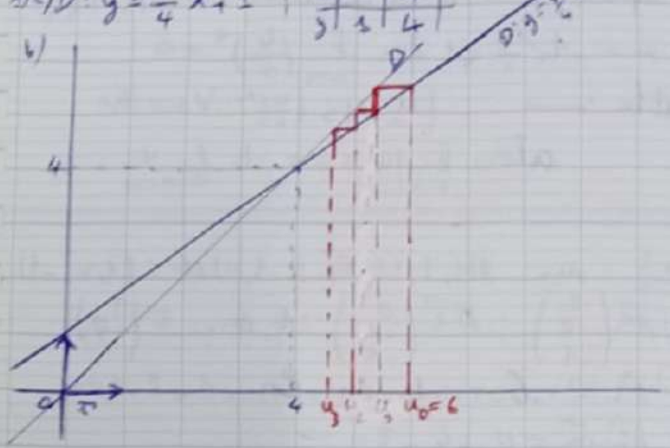
Devoir De contrôle N3
3Tech - 2024/2025

EX1,

1/a) $D : y = \frac{3}{4}x + 1$;

x	0	4
y	1	4

b)



c) D'après la figure (U_n) est converge vers 4

2/a) $U_0 = 6 > 4$ vrai

on pose que $u_n > 4$ et montrons que $u_{n+1} > 4$

En effet on a : $u_n > 4 \iff \frac{3}{4}u_n > 3$

$\iff \frac{3}{4}u_n + 1 > 4 \iff u_{n+1} > 4$ vraie

conclusion

D'après le principe de recurrence $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n > 4$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_{n+1} - u_n = \frac{3}{4}u_n + 1 - u_n$
$= \frac{1}{4}(3u_n - 4u_n + 4)$
$= \frac{1}{4}(4 - u_n)$

c) $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n > 4 \iff (4 - u_n) < 0$

par suite $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4}(4 - u_n) < 0$

donc la suite (u_n) est décroissante

3/ on a : $\forall n \in \mathbb{N}$; $V_n = u_n - 4$

donc $V_{n+1} = u_{n+1} - 4$
$= \frac{3}{4}u_n + 1 - 4$
$= \frac{3}{4}u_n - 3$
$= \frac{3}{4}(u_n - 4)$
$= \frac{3}{4}V_n$

d'où la suite (V_n) est géométrique de raison $q = \frac{3}{4}$ de 1er terme $V_0 = u_0 - 4 = 6 - 4 = 2$

b) (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{3}{4}$ tel que $V_0 = 2$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $V_n = V_0 \cdot q^n$

$\iff V_n = 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$

+ comme $-1 < \frac{3}{4} < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$

4) a) on a : $\forall n \in \mathbb{N}$; $V_n = U_n - 4 \iff U_n = V_n + 4$:

$\iff U_n = 2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n + 4$

b) donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(2\left(\frac{3}{4}\right)^n + 4\right) = 4$

5/a) on a : $u_1 = \frac{3}{4}u_0 + 1 = \frac{3}{4} \times 6 + 1 = \frac{11}{2}$

donc $S_1 = \frac{1}{2}\sum\limits_{k=0}^{1} u_k = \frac{1}{2}(u_0 + u_1)$
$= \frac{1}{2}\left(6 + \frac{11}{2}\right) = \frac{23}{4}$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$; on $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k = \sum\limits_{k=0}^{n}(V_k + 4)$ car $u_k = V_k + 4$
$= \sum\limits_{k=0}^{n} V_k + \sum\limits_{k=0}^{n} 4$

or $\sum\limits_{k=0}^{n} V_k = V_0\,\dfrac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{4}}$ car (V_n) suite géométrique

$= 2\,\dfrac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{\frac{1}{4}} = 8\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right)$

et $\sum\limits_{k=0}^{n} 4 = 4(n+1)$

d'où $S_n = \frac{1}{2n}\left[8\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right) + 4(n+1)\right]$
$= \frac{4}{n}\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right) + 2\,\frac{n+1}{n}$

c) on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4}{n} = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} = 0$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\,\frac{n+1}{n} = 2$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 0 + 2 = 2$.

EX2,

(U_n) définie par $U_0 = \frac{1}{2}$ et $U_{n+1} = \frac{3U_n}{U_n + 2}$; $n \in \mathbb{N}$

1) a) $U_0 = \frac{1}{2}$ donc $U_1 = \frac{3U_0}{U_0 + 2} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2} + 2} = \frac{3}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

$U_2 = \frac{3U_1}{U_1 + 2} = \frac{3 \times \frac{3}{5}}{\frac{3}{5} + 2} = \frac{9}{5} \times \frac{5}{13} = \frac{9}{13}$

b) on a : $U_1 - U_0 = \frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$; $U_2 - U_1 = \frac{9}{13} - \frac{3}{5} = \frac{6}{65}$

$\frac{U_1}{U_0} = \frac{3}{5} \times 2 = \frac{6}{5}$ et $\frac{U_2}{U_1} = \frac{9}{13} \times \frac{5}{3} = \frac{15}{13}$

on a : $U_1 - U_0 \neq U_2 - U_1$ et $\frac{U_1}{U_0} \neq \frac{U_2}{U_1}$ donc (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique

2) a) $\forall n\in\mathbb{N};\ 3-\frac{6}{u_n+2}=\frac{3u_n+6-6}{u_n+2}=\frac{3u_n}{u_n+2}=u_{n+1}$

b) pour $n=0$: $u_0=\frac{1}{2}$ donc $0<u_0<1$ vrai

on pose $0<u_n<1$ et montrons que $0<u_{n+1}<1$

En effet : on a $0<u_n<1 \Leftrightarrow 2<u_n+2<3$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}>\frac{1}{u_n+2}>\frac{1}{3} \Leftrightarrow -\frac{6}{2}<-\frac{6}{u_n+2}<-\frac{6}{3}$

$\Leftrightarrow 3-3<3-\frac{6}{u_n+2}<3-\frac{6}{3} \Leftrightarrow 0<u_{n+1}<1$ vrai

Conclusion

d'après le principe de récurrence $\forall n\in\mathbb{N}: 0<u_n<1$

3) a) $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}-u_n=\frac{3u_n}{u_n+2}-\frac{u_n^2+2u_n}{u_n+2}$

$=\frac{-u_n^2+u_n}{u_n+2}$

$=\frac{u_n(1-u_n)}{u_n+2}>0$

puisque $0<u_n<1$ donc $1-u_n>0$ et $u_n+2>0$

donc la suite (u_n) est croissante.

b) est croissante donc $\forall n\in\mathbb{N};\ u_n\geq u_0$

donc $\frac{1}{2}\leq u_n<1$ puisque $u_n<1$

c) $\forall n\in\mathbb{N};\ \frac{1}{2}\leq u_n<1 \Leftrightarrow \frac{5}{2}\leq u_n+2<3$

$\Leftrightarrow \frac{2}{5}\geq\frac{1}{u_n+2}>\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{4}{5}\geq\frac{2}{u_n+2}>\frac{2}{3}$

4) a) $\forall n\in\mathbb{N}$, on a

$|u_{n+1}-1|=\left|\frac{3u_n}{u_n+2}-\frac{u_n+2}{u_n+2}\right|$

$=\left|\frac{2u_n-2}{u_n+2}\right|$

$=\frac{2}{u_n+2}\,|u_n-1|$

or $\frac{2}{u_n+2}\leq\frac{4}{5}$ donc $\forall n\in\mathbb{N}$

$|u_{n+1}-1|\leq\left(\frac{4}{5}\right)|u_n-1|$

b) on a $|u_0-1|=\left|1-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}<\left(\frac{4}{5}\right)^0$ vrai

on pose $|u_n-1|\leq\left(\frac{4}{5}\right)^n$ et montrons que $|u_{n+1}-1|\leq\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$

on a $|u_{n+1}-1|\leq\left(\frac{4}{5}\right)|u_n-1|$ or $|u_n-1|\leq\left(\frac{4}{5}\right)^n$

donc $|u_{n+1}-1|\leq\frac{4}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^n \Leftrightarrow |u_{n+1}-1|\leq\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$ vrai

Conclusion

d'après le principe de récurrence $\forall n\in\mathbb{N}\ |u_n-1|\leq\left(\frac{4}{5}\right)^n$

c) on a $-1<\frac{4}{5}<1$ donc $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n=0$

Et comme $|u_n-1|\leq\left(\frac{4}{5}\right)^n\ \forall n\in\mathbb{N}$

alors $\lim_{n\to+\infty}|u_n-1|=0$ et $\lim_{n\to+\infty}u_n=1$

Ex3 on a $A(1;1;1)$; $B(-1;-1;0)$ et $C(1;0;-1)$

1) a) $\vec{AB}\begin{pmatrix}-2\\-2\\-1\end{pmatrix}$; $\vec{AC}\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix}$ et on a $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-4\\2\end{pmatrix}$

donc $\vec{AB}\cdot\vec{n}=-6-2\times(-4)+(-1)\times2=-6+8-2=0$

et $\vec{AC}\cdot\vec{n}=0+4-4=0$

donc $\vec{AC}\perp\vec{n}$ et $\vec{AB}\perp\vec{n}$

b) $\vec{n}\perp\vec{AC}$ et $\vec{n}\perp\vec{AB}$ donc $\vec{n}$ vecteur normal au plan (ABC) et $(ABC): 3x-4y+2z+d=0$

or $C\in(ABC)$ donc $3-4\times0-2+d=0 \Leftrightarrow d=-1$

et $(ABC): 3x-4y+2z-1=0$

2) a) on a $D(0;6;-2)$ et $3\times0-4\times6+2\times(-2)-1=-29\neq0$ donc $D\notin(ABC)$

b) $d(D,(ABC))=\frac{|3\times0-4\times6+2\times(-2)-1|}{\sqrt{3^2+4^2+2^2}}=\frac{|-29|}{\sqrt{29}}=\sqrt{29}$

3) $Q: 2x+4y+5z+3=0$ de vecteur normal $\vec{n'}\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}$

$\vec{n}\cdot\vec{n'}=2\times3-4\times4+2\times5=6-16+10=0$

donc $\vec{n}\perp\vec{n'}$ par suite $(ABC)\perp Q$

$C(1;0;-1)$ et $2\times1+4\times0+5\times(-1)+3=2-5+3=0$ donc $C\in Q$

4) a) on a $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-4\\2\end{pmatrix}$ vecteur directeur de Δ donc $\Delta\perp(ABC)$

et pour $\alpha=0$; $(x,y,z)=(0,6,-2)$ donc $D\in\Delta$

b) $H\in\Delta\cap(ABC)$ donc

$3\times3\alpha-4(6-4\alpha)+2(-2+2\alpha)-1=0$

$\Leftrightarrow 9\alpha-24+16\alpha-4+4\alpha-1=0$

$\Leftrightarrow 29\alpha-29=0 \Leftrightarrow \alpha=1$

et $(x=3;\ y=6-4=2$ et $z=-2+2=0)$ donc $H(3;2;0)$

c) H le projeté orthogonal de B sur Δ car $B\in(ABC)$

$(ABC)\perp\Delta$ et $(ABC)\cap\Delta=H$

donc $d(B,\Delta)=BH=\sqrt{(3+1)^2+(2+1)^2+0^2}=\sqrt{25}=5$

5) a) BHD triangle rectangle en H car $HD\perp(ABC)$ en H

b) $\mathcal{A}_{BHD}=\frac{BH\cdot HD}{2}=\frac{5\sqrt{29}}{2}$ car $HD=d(D,(ABC))$ puisque H le projeté orthogonal de D sur (ABC)