UNE CORRECTION POSSIBLE du devoir de contrôle n°1 3ème Mathématiques

de Mr Mandhouj 07 12 10

Proposée par Kooli Mohamed Hechmi

Exercice 1

1) a) $f(x) = \frac{3x+1}{x-1}$

$x \in D_f \Leftrightarrow x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ alors $D_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x+1}{x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x}{x} = 3$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x+1}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x}{x} = 3$

La droite d'équation $y = 3$ est une asymptote horizontale à la courbe de f au voisinage de $-\infty$ et au voisinage de $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} \frac{\overbrace{3x+1}^{4}}{\underbrace{x-1}_{0^+}} = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \frac{\overbrace{3x+1}^{4}}{\underbrace{x-1}_{0^-}} = -\infty$

La droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale à la courbe de f.

2) a) $g(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-3x-4}$

$x \in D_g \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 3x - 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq -1 \quad et \quad x \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow D_g = [0\,,+\infty[\backslash\{4\}$

b) $\lim\limits_{x\to+4} g(x) = \lim\limits_{x\to4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-3x-4} = \lim\limits_{x\to4} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(x+1)(\sqrt{x}+2)} = \lim\limits_{x\to4} \frac{x-4}{(x-4)(x+1)(\sqrt{x}+2)}$

$= \lim\limits_{x\to4} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{20}$

Exercice 2

1) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2+5} - 2x & si\ x \geq 2 \\ f(x) = \frac{x^3-x-6}{x-2} & si\ x < 2 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3-x-6}{x-2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+5} - 2x \quad = \lim\limits_{x\to+\infty} |x|\sqrt{1+\frac{5}{x^2}} - 2x =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{1+\frac{5}{x^2}} - 2\right) = -\infty$

2) **a)** $f(2) = -1$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \sqrt{x^2+5} - 2x = -1$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = f(2)$ alors f est continue à droite en 2

b) $\forall\, x \neq 2\,;\ (x-2)(x^2+2x+3) = x^3+2x^2+3x-2x^2-4x-6 = x^3-x-6$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \frac{x^3-x-6}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2^-} \frac{(x-2)(x^2+2x+3)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2^-} x^2+2x+3 = 11$

c) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ alors f n'est pas continue en 2.

3) $x \mapsto \frac{x^3-x-6}{x-2}$ est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ en particulier sur $]-\infty\,,2[$

$x \mapsto x^2+5$ est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]2\,,+\infty[$ et $\forall x \in\,]2\,,+\infty[\,;\ x^2+5>0$

$x \mapsto \sqrt{x^2+5}$ est continue sur $]2\,,+\infty[$

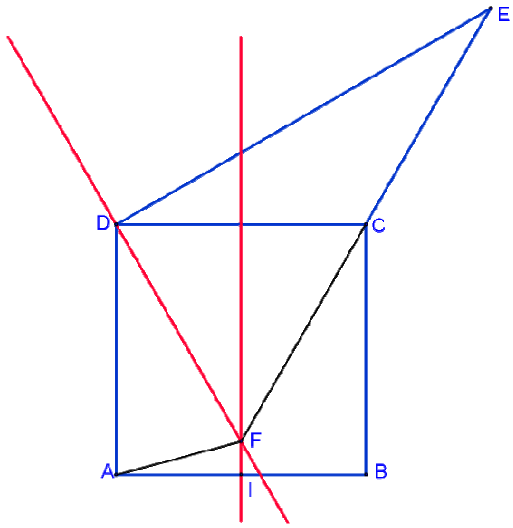
$x \mapsto \sqrt{x^2+5} - 2x$ est continue sur $]2\,,+\infty[$

Conclusion : f est continue sur chacun des intervalles $]-\infty\,,2[$ et $]2\,,+\infty[$.

Exercice 3

1) $\left(\widehat{\overrightarrow{CD}\,,\overrightarrow{CE}}\right) \equiv \frac{10\pi}{3}\,[2\pi] \equiv \frac{(3\times3+1)\pi}{3}[2\pi] \equiv 3\pi+\frac{\pi}{3}[2\pi] \equiv 3\pi+\pi-\pi+\frac{\pi}{3}[2\pi]$

$\equiv 4\pi-\pi+\frac{\pi}{3}[2\pi] \equiv -\pi+\frac{\pi}{3}[2\pi] \equiv -\frac{2\pi}{3}[2\pi].$



2) Le triangle DCE est isocèle en C (car $= CE$) alors :

$\left(\overrightarrow{DC}\,,\overrightarrow{DE}\right) \equiv \frac{\pi-\left(\widehat{\overrightarrow{CE}\,,\overrightarrow{CD}}\right)}{2}[2\pi] \equiv \frac{\pi+\left(\widehat{\overrightarrow{CD}\,,\overrightarrow{CE}}\right)}{2}[2\pi] \equiv \frac{\pi-\frac{2\pi}{3}}{2}[2\pi] \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$

3) **a)** On a $FC = FD$ (car $F \in$ med $[CD]$) alors le triangle DFC est isocèle en F **(1)**

$\left(\widehat{\overrightarrow{DF},\overrightarrow{DC}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{DF},\overrightarrow{DE}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DC}}\right)[2\pi] \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{DF},\overrightarrow{DE}}\right) - \left(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DE}}\right)[2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}[2\pi] \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ **(2)**

de **(1)** et **(2)** le triangle DFC est équilatéral alors $\left(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CF}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

b) $\left(\widehat{\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CF}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CD}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CF}}\right)[2\pi] \equiv -\left(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CE}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CF}}\right)[2\pi]$

$\equiv \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3}[2\pi] \equiv \pi[2\pi]$

alors les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CF}$ sont colinéaires donc les trois points F, C et E sont alignés.

4) $\left(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DF}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DF}}\right)[2\pi] \equiv \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}[2\pi] \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$

On a le triangle DFC est équilatéral alors $DF = DC$ **(1)**

$ABCD$ est un carré alors $DA = DC$ **(2)**

de **(1)** et **(2)** $DA = DF$ alors le triangle DAF est isocèle en D par suite

$\left(\widehat{\overrightarrow{FD},\overrightarrow{FA}}\right) \equiv \frac{\pi - \left(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DF}}\right)}{2}[2\pi] \equiv \frac{\pi - \frac{\pi}{6}}{2}[2\pi] \equiv \frac{5\pi}{12}\ [2\pi]$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{5\pi}{12}\ [2\pi]$

Alors $\boldsymbol{\left(\widehat{\overrightarrow{FD},\overrightarrow{FA}}\right) \equiv \frac{5\pi}{12}\ [2\pi]}$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{5\pi}{12}\ [2\pi]$

$\left(\widehat{\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AF}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AD}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AF}}\right)[2\pi] \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AD}}\right) - \left(\widehat{\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AD}}\right)[2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12}\ [2\pi] \equiv \frac{\pi}{12}\ [2\pi]$

or dans le triangle AIF on a $\left(\widehat{\overrightarrow{FA},\overrightarrow{FI}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AF}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{IF},\overrightarrow{IA}}\right) \equiv \pi\ [2\pi]$

alors $\left(\widehat{\overrightarrow{FA},\overrightarrow{FI}}\right) + \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} \equiv \pi\ [2\pi]$ $\boldsymbol{\left(\widehat{\overrightarrow{FA},\overrightarrow{FI}}\right) \equiv \frac{5\pi}{12}\ [2\pi]}$

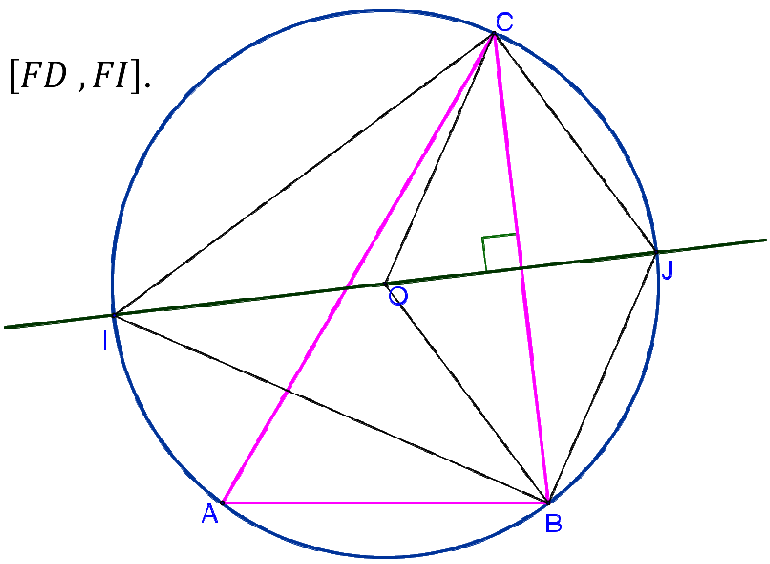
Conclusion

$\left(\widehat{\overrightarrow{FD},\overrightarrow{FA}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{FA},\overrightarrow{FI}}\right)\ [2\pi]$

Alors $[FA)$ est la bissectrice du secteur $[FD\ , FI]$.

Exercice 4

1) a)



b) $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \cos\widehat{CAB} = 9 + 25 - 2 \times 3 \times 5 \times \frac{1}{2} = 19$

alors $BC = \sqrt{19}$

2) a) On $I \in$ med $[BC]$ alors $IB = IC$ donc le triangle IBC est isocèle **(1)**

On a les angles $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC})$ deux angles inscrits et qui interceptent le même arc $\overset{\frown}{BC}$ et I et A sur le même arc $\overset{\frown}{CB}$ alors $\left(\widehat{\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) [2\pi] \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ **(2)**

de **(1)** et **(2)** le triangle IBC est équilatéral.

b) On a les angles $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $(\overrightarrow{JB}, \overrightarrow{JC})$ deux angles inscrits et qui interceptent le même arc $\overset{\frown}{CB}$ et I sur l'arc $\overset{\frown}{CB}$ et A sur l'arc $\overset{\frown}{CB}$ alors $\left(\widehat{\overrightarrow{JB}, \overrightarrow{JC}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) [2\pi] \equiv \frac{\pi}{3} + \pi\ [2\pi]$

$$\equiv -\frac{2\pi}{3} [2\pi]$$

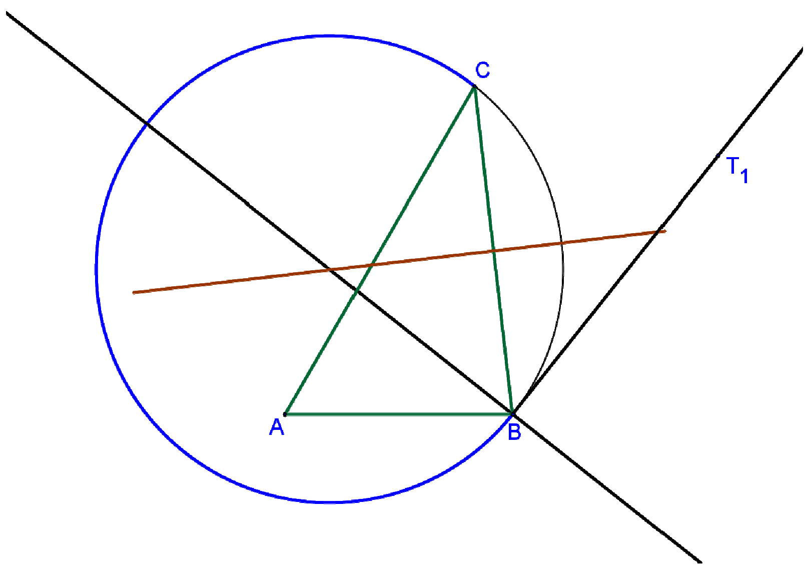
$(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ est un angle au centre et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un angle inscrit et qui interceptent le même l'arc $\overset{\frown}{BC}$ alors $\left(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}}\right) \equiv 2\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) [2\pi] \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$

Dans le cercle $\mathscr{C}$; $[IJ]$ est un diamètre et CIJ est un triangle direct alors : $(\overrightarrow{CI}, \overrightarrow{CJ}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

3) $\left(\widehat{\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}}\right) \equiv \frac{25\pi}{4} [2\pi] \equiv \frac{(4\times6+1)\pi}{4} [2\pi] \equiv 6\pi + \frac{\pi}{4} [2\pi] \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$

$M \in E_1 \Leftrightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}}\right) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$

alors E_1 est l'arc $\overset{\frown}{CB}$ privé des points B et C du cecle passant par B et C et tangent à $[BT_1)$ en B et tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{BT_1}, \overrightarrow{BC}}\right) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$.

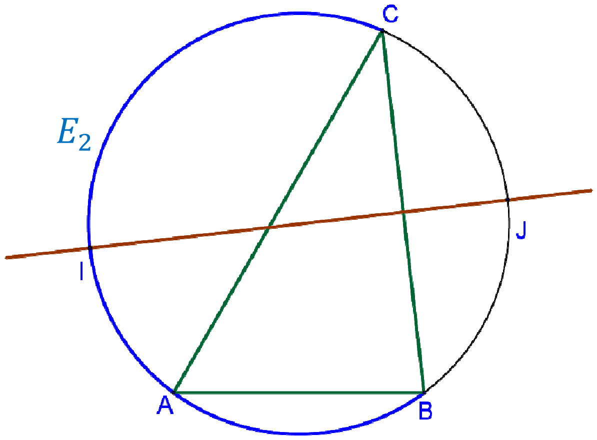


$M \in E_2 \iff \left(\widehat{\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

dans le cercle $\mathcal{C}$ on a I et A sur le même arc $\overset{\curvearrowright}{CB}$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right)[2\pi] \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

pour tout point M de l'arc $\overset{\curvearrowright}{CB}$ privé de B et C on a $\left(\widehat{\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

alors $E_2 = \overset{\curvearrowright}{CB} \backslash \{B, C\}$



4) $M \in E_3 \iff \left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}}\right)[2\pi]$

Alors E_3 est l'arc $\overset{\curvearrowright}{AB}$ du cecle passant par A et B et tangent à $[AT_2)$ en A et tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AT_2}, \overrightarrow{AB}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}}\right)[2\pi]$ privé des points A et B.