UNE CORRECTION POSSIBLE du devoir de contrôle n°1 3ème Mathématiques de Mr Mandhouj 05 12 11

Proposée par Kooli Mohamed Hechmi

Exercice 1

1) a) $x \in D_f \Leftrightarrow x^2 + x - 6 \neq 0$

Posons $x^2 + x - 6 = 0 \quad \Delta = 1 + 24 = 25 \quad x = -3$ ou $x = 2$

Alors $D_f = \mathbb{R} \backslash \{-3, 2\}$.

b)

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2+x-6} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+3)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x+3} = \frac{4}{7}$$

$$\lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to -3^+} \frac{\overbrace{x^2-4}^{5}}{\underbrace{x^2+x-6}_{0.^-}} = -\infty$$

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
x^2+x-6		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-4}{x^2+x-6} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

2) a) $x \in D_g \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 \geq 0$

posons $x^2 + 2x - 3 = 0 \quad x = 1$ ou $x = -3$

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
x^2+2x-3		$+$	0	$-$	0	$+$	

alors $D_g =]-\infty, -3] \cup [1, +\infty[$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+2x-3} = +\infty$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to +\infty} \sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}} = 1$$

$$\lim_{x\to +\infty} (g(x) - x) = \lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+2x-3} - x$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+2x-3}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2x-3}+x\right)}{\sqrt{x^2+2x-3}+x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+2x-3-x^2}{\sqrt{x^2+2x-3}+x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x-3}{\sqrt{x^2+2x-3}+x}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{2x-3}{x\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}+x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x\left(2-\frac{3}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}+1\right)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2-\frac{3}{x}}{\sqrt{\underbrace{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}_{1}}+1} = 1$$

3) **a)** $x \in D_h \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x \neq 1 \end{cases}$

alors $D_h = [-3\,,+\infty[\backslash\{1\}$

b) $\lim\limits_{x\to+1} h(x) = \lim\limits_{x\to1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \lim\limits_{x\to1} \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim\limits_{x\to1} \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{1}{4}$

$\lim\limits_{x\to-3^+} h(x) = \lim\limits_{x\to-3^+} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim\limits_{x\to1+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} = 0$

4) **a)** $x \in D_k \Leftrightarrow x-2 \neq 0\,;\, x \neq 2$ alors $D_k = \mathbb{R}\backslash\{2\}$

b)

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x-2$	$-$	0	$+$
$\lvert x-2\rvert$	$-x+2$		$x-2$

$\lim\limits_{x\to2^-} k(x) = \lim\limits_{x\to2^-} \frac{x^2+3x-10}{|x-2|} = \lim\limits_{x\to2^-} \frac{(-x+2)(-x-5)}{-x+2} = \lim\limits_{x\to2^-} -x-5 = -7$

$\lim\limits_{x\to2^+} k(x) = \lim\limits_{x\to2^+} \frac{x^2+3x-10}{|x-2|} = \lim\limits_{x\to2^+} \frac{(x-2)(x+5)}{x-2} = \lim\limits_{x\to2^+} x+5 = 7$

On a $\lim\limits_{x\to2^-} k(x) \neq \lim\limits_{x\to2^+} k(x)$ alors la fonction k n'admet pas de limite en 2

Exercice 2

1) $x \mapsto \frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$ est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\,,1\}$ en particulier sur $]1\,,+\infty[$

$x \mapsto x^2+1$ est définie sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]-\infty\,,1]$ et $\forall \in\,]-\infty\,,1]\,;\, x^2+1 \geq 0$

$x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ est définie sur $]-\infty\,,1]$

$x \mapsto \sqrt{x^2+1}+2x$ est définie sur $]-\infty\,,1]$

alors f est définie sur $]-\infty\,,1] \cup\,]1\,,+\infty] = \mathbb{R}$.

2) **a)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-3x+2}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$

alors la droite d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1}+2x = \lim\limits_{x\to-\infty} |x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+2x = \lim\limits_{x\to-\infty} -x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+2x$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+2\right) = -\infty$

3) **a)** $\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} \sqrt{x^2+1} + 2x = \sqrt{2} + 2$

$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{x^2-3x+2}{x^2-1} = \lim_{x\to1^+} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to1^+} \frac{x-2}{x+1} = -\frac{1}{2}$

on a $\lim_{x\to1^-} f(x) \neq \lim_{x\to1^+} f(x)$ alors f n'est pas continue en 1.

b) $x \mapsto \frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$ est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\,,\}$ en particulier sur $]1\,,+\infty[$ $\quad(\mathbf{1})$

$x \mapsto x^2+1$ est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]-\infty\,,1[$ et $\forall\in\,]-\infty\,,1]$; $x^2+1 \geq 0$

$x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ est continue sur $]-\infty\,,1]$

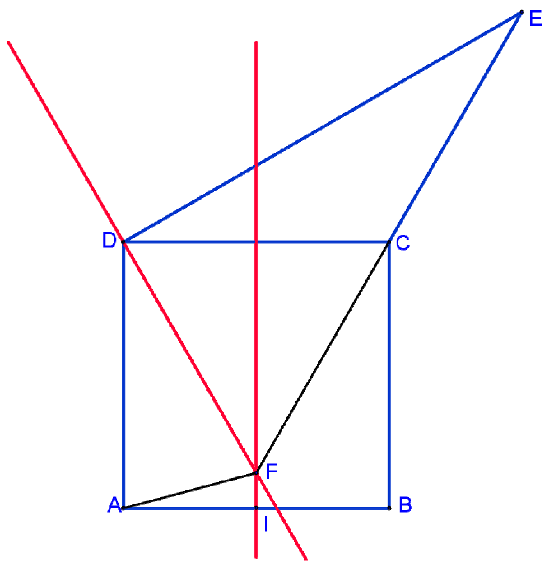
$x \mapsto \sqrt{x^2+1} + 2x$ est continue sur $]-\infty\,,1]$ $\quad(\mathbf{2})$

de $(\mathbf{1})$ et $(\mathbf{2})$ f est continue sur chacun des intervalles $]-\infty\,,1[$ et $]1\,,+\infty[$

Exercice 3

1) $\left(\widehat{\overrightarrow{CD}\,,\overrightarrow{CE}}\right) \equiv \frac{10\pi}{3}\ [2\pi] \equiv \frac{(3\times3+1)\pi}{3}[2\pi] \equiv 3\pi + \frac{\pi}{3}[2\pi] \equiv 3\pi + \pi - \pi + \frac{\pi}{3}[2\pi]$

$\equiv 4\pi - \pi + \frac{\pi}{3}[2\pi] \equiv -\pi + \frac{\pi}{3}[2\pi] \equiv -\frac{2\pi}{3}[2\pi].$



2) Le triangle DCE est isocèle en C (car $= CE$) alors :

$\left(\widehat{\overrightarrow{DC}\,,\overrightarrow{DE}}\right) \equiv \frac{\pi - \left(\widehat{\overrightarrow{CE}\,,\overrightarrow{CD}}\right)}{2}[2\pi] \equiv \frac{\pi + \left(\widehat{\overrightarrow{CD}\,,\overrightarrow{CE}}\right)}{2}[2\pi] \equiv \frac{\pi - \frac{2\pi}{3}}{2}[2\pi] \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$

3) **a)** On a $FC = FD$ (car $F \in$ med $[CD]$) alors le triangle DFC est isocèle en F **(1)**

$\left(\widehat{\overrightarrow{DF}\,,\overrightarrow{DC}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{DF}\,,\overrightarrow{DE}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{DE}\,,\overrightarrow{DC}}\right)[2\pi] \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{DF}\,,\overrightarrow{DE}}\right) - \left(\widehat{\overrightarrow{DC}\,,\overrightarrow{DE}}\right)[2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}[2\pi] \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ **(2)**

de **(1)** et **(2)** le triangle DFC est équilatéral alors $\left(\widehat{\overrightarrow{CD}\,,\overrightarrow{CF}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

b) $\left(\widehat{\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CF}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CD}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CF}}\right)[2\pi] \equiv -\left(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CE}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CF}}\right)[2\pi]$

$\equiv \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3}[2\pi] \equiv \pi[2\pi]$

alors les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CF}$ sont colinéaires donc les trois points F, C et E sont alignés.

4) $\left(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DF}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DF}}\right)[2\pi] \equiv \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}[2\pi] \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$

On a le triangle DFC est équilatéral alors $DF = DC$ **(1)**

$ABCD$ est un carré alors $DA = DC$ **(2)**

de **(1)** et **(2)** $DA = DF$ alors le triangle DAF est isocèle en D par suite

$\left(\widehat{\overrightarrow{FD},\overrightarrow{FA}}\right) \equiv \frac{\pi - \left(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DF}}\right)}{2}[2\pi] \equiv \frac{\pi - \frac{\pi}{6}}{2}[2\pi] \equiv \frac{5\pi}{12}\ [2\pi]$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{5\pi}{12}\ [2\pi]$

Alors $\boldsymbol{\left(\widehat{\overrightarrow{FD},\overrightarrow{FA}}\right) \equiv \frac{5\pi}{12}\ [2\pi]}$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{5\pi}{12}\ [2\pi]$

$\left(\widehat{\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AF}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AD}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AF}}\right)[2\pi] \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AD}}\right) - \left(\widehat{\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AD}}\right)[2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12}\ [2\pi] \equiv \frac{\pi}{12}\ [2\pi]$

or dans le triangle AIF on a $\left(\widehat{\overrightarrow{FA},\overrightarrow{FI}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AF}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{IF},\overrightarrow{IA}}\right) \equiv \pi\ [2\pi]$

alors $\left(\widehat{\overrightarrow{FA},\overrightarrow{FI}}\right) + \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} \equiv \pi\ [2\pi]$ $\boldsymbol{\left(\widehat{\overrightarrow{FA},\overrightarrow{FI}}\right) \equiv \frac{5\pi}{12}\ [2\pi]}$

<u>Conclusion</u>

$\left(\widehat{\overrightarrow{FD},\overrightarrow{FA}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{FA},\overrightarrow{FI}}\right)\ [2\pi]$

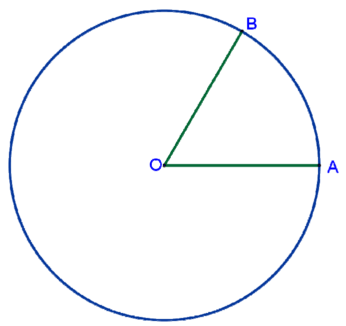
Alors $[FA)$ est la bissectrice du secteur $[FD\ , FI]$.

<u>Exercice 4</u>

1) a) $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right) \equiv -\frac{47\pi}{3}\ [2\pi] \equiv -\frac{(3\times15+2)\pi}{3}\ [2\pi] \equiv -15\pi - \frac{2\pi}{3}\ [2\pi] \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

b) $\frac{2011\pi}{3} \equiv \frac{(3\times670+1)\pi}{3}[2\pi] \equiv 670\pi + \frac{\pi}{3}[2\pi] \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

alors $\frac{2011\pi}{3}$ est une mesure de $\left(\overrightarrow{OA}\ ,\overrightarrow{OB}\right)$



2) **a)** $M \in \Gamma \iff \left(\widehat{\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MG}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$

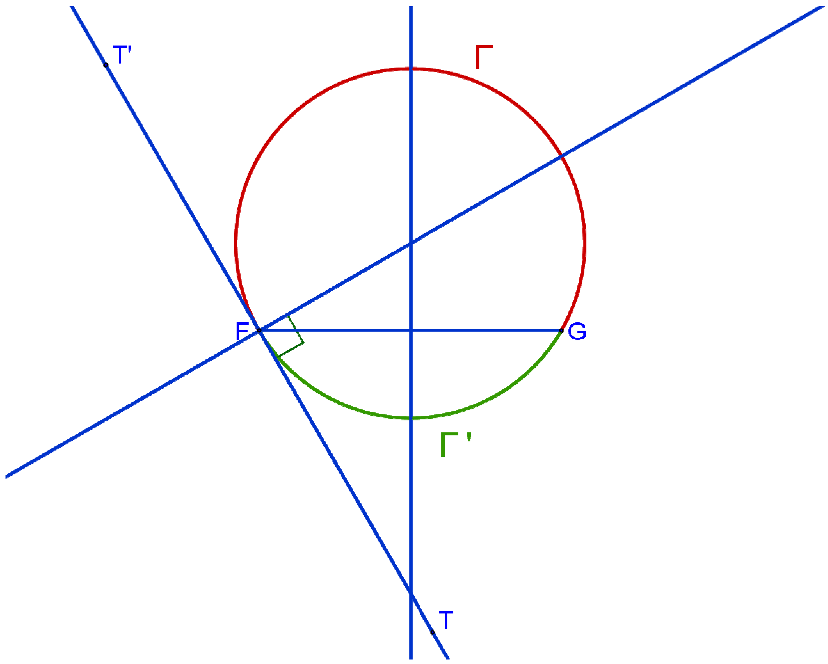
Γ est l'arc $\overset{\frown}{GF} \backslash \{F, G\}$ du cercle passant par F et G et tangent à (FT) en F et tel que :

$\left(\widehat{\overrightarrow{FT}, \overrightarrow{FG}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$

$M \in \Gamma' \iff \left(\widehat{\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MG}}\right) \equiv \frac{-2\pi}{3}\,[2\pi]$

Γ' est l'arc $\overset{\frown}{FG} \backslash \{F, G\}$ du cercle passant par F et G et tangent à (FT') en F et tel que :

$\left(\widehat{\overrightarrow{FT'}, \overrightarrow{FG}}\right) \equiv -\frac{2\pi}{3}\,[2\pi]$



b) $M \in E \iff \left(\widehat{\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MG}}\right) = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\iff \left(\widehat{\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MG}}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $\left(\widehat{\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MG}}\right) = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

alors $E = \Gamma \cup \Gamma'$