Proposée par Kooli Mohamed Hechmi

Exercice 1

1) a) $\frac{\pi}{4}$ voici l'explication

$$\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) \equiv -\frac{141\pi}{12}[2\pi] \equiv -\frac{(12\times 11+9)\pi}{12}[2\pi] \equiv -11\pi - \frac{9\pi}{12}[2\pi]$$

$$\equiv -11\pi - \pi + \pi - \frac{9\pi}{12}[2\pi] \equiv -12\pi + \frac{3\pi}{12}[2\pi] \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$$

2) a)

3) b) voici l'explication

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2+x-2)\sqrt{x}}{(x-1)^2} = \lim_{X\to+\infty} \frac{(X^4+X^2-2)X}{(X^2-1)^2} = \lim_{X\to+\infty} \frac{X^5+X^3-2X}{X^4-2X^2+1}$$

$$= \lim_{X\to+\infty} \frac{X^5}{X^4} = \lim_{X\to+\infty} X = +\infty$$

Exercice 2

1) a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{7x-23}{3(x-3)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{7x}{3x} = \frac{7}{3}$

b) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+5} = +\infty$

c) $\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+5} - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+5-x^2}{\sqrt{x^2+5}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5}{\sqrt{x^2+5}+x} = 0$

alors la droite Δ d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $+\infty$.

d) $\forall x \in [2, +\infty[$ $f(x) - x = \frac{5}{\sqrt{x^2+5}+x} > 0$

alors $\forall x \in [2, +\infty[$ C_f est au dessus de Δ.

2) $x \mapsto x^2 + 5$ est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]2, +\infty[$ et $\forall x \in]2, +\infty[$, $x^2 + 5 > 0$

$x \mapsto \sqrt{x^2+5}$ est continue sur $]2, +\infty[$

$x \mapsto \frac{7x-23}{3(x-3)}$ est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ en particulier sur $]-\infty, 2[$

alors f est continue sur chacun des intervalles $]-\infty, 2[$ et $]2, +\infty[$ **(1)**

$f(2) = \sqrt{2^2+5} = 3$

$\lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^-} \frac{7x-23}{3(x-3)} = 3$ $\lim_{x\to2^+} f(x) = \lim_{x\to2^+} \sqrt{x^2+5} = 3$

on a $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$ **(2)**

de **(1)** et **(2)** f est continue sur $\mathbb{R}$.

3) **a)** $\lim\limits_{x\to 2^-} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\frac{7x-23}{3(x-3)}-3}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{-2(x-2)}{3(x-3)(x-2)}$

$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{-2}{3(x-3)} = \frac{2}{3}$$

b) Calculer $\lim\limits_{x\to 2^+} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}$

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{x+2}{\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)} = \frac{2}{3}$$

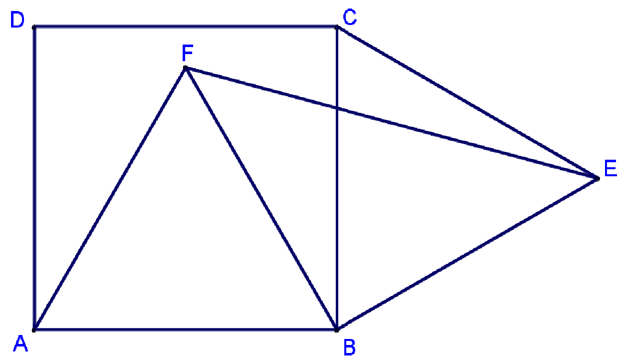
c) On a $\lim\limits_{x\to 2^-} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \varphi(x) = \dfrac{2}{3}$

alors φ admet un prologement par continuité en 2 définie par la fonction h tel que :

$$h(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } x \neq 2 \\ \dfrac{2}{3} & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

Exercice 3

1)



$$\left(\widehat{\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BF}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BC}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BF}}\right) [2\pi]$$

$$\equiv \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} [2\pi] \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

On a $ABCD$ est un carré alors $AB = BC$ et ABF est un triangle équilatéral alors $AB = BF$

par suite $BF = BC$

et on a BCE un triangle équilatéral alors $BE = BC$

ce qui donne $BE = BF$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BF}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ alors BEF est un triangle isocèle rectangle en B alors

$$\left(\widehat{\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EB}}\right) \equiv \frac{\pi - \left(\widehat{\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BF}}\right)}{2}[2\pi] \equiv \frac{\pi - \frac{\pi}{2}}{2}[2\pi] \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$$

$$\left(\widehat{\overrightarrow{EB},\overrightarrow{EF}}\right) \equiv -\left(\widehat{\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EB}}\right)[2\pi] \equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$$

2) $\left(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CE}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CE}}\right)[2\pi] \equiv \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}[2\pi] \equiv \frac{5\pi}{6}\ [2\pi]$

On a CDE est un triangle isocèle en C alors

$$\left(\widehat{\overrightarrow{EC},\overrightarrow{ED}}\right) \equiv \frac{\pi - \left(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CE}}\right)}{2}[2\pi] \equiv \frac{\pi - \frac{5\pi}{6}}{2} \equiv \frac{\pi}{12}\ [2\pi]$$

3) $\left(\widehat{\overrightarrow{EC},\overrightarrow{EF}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{EC},\overrightarrow{EB}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{EB},\overrightarrow{EF}}\right)[2\pi] \equiv \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}[2\pi] \equiv \frac{\pi}{12}[2\pi]$

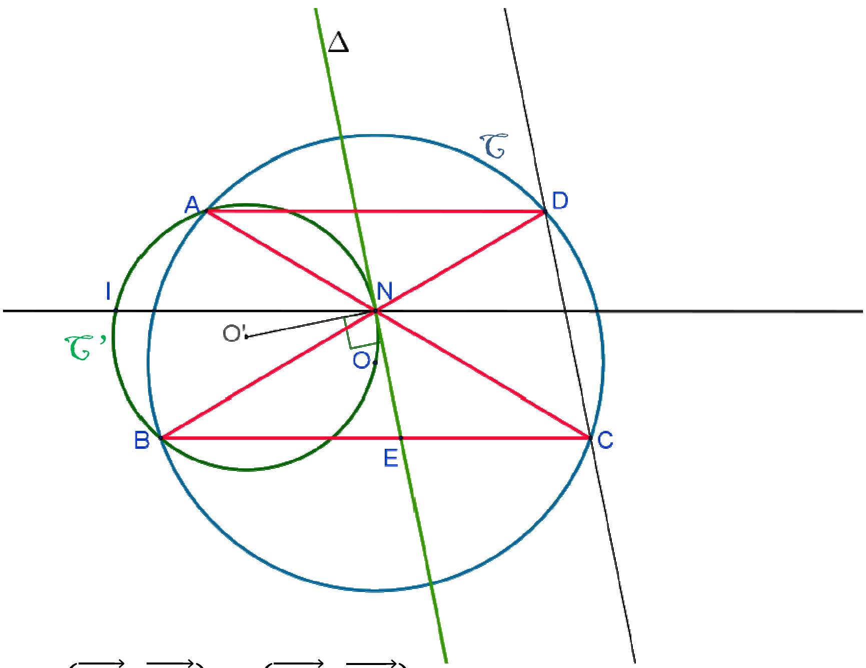
On a : $\left(\widehat{\overrightarrow{EC},\overrightarrow{ED}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{EC},\overrightarrow{EF}}\right)[2\pi] \quad \Leftrightarrow \quad \left(\widehat{\overrightarrow{EC},\overrightarrow{ED}}\right) - \left(\widehat{\overrightarrow{EC},\overrightarrow{EF}}\right) \equiv 0[2\pi]$

$\Leftrightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EC}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{EC},\overrightarrow{ED}}\right) \equiv 0[2\pi] \quad \Leftrightarrow \quad \left(\widehat{\overrightarrow{EF},\overrightarrow{ED}}\right) \equiv 0[2\pi]$

alors $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{ED}$ sont colinéaires donc les point E, F et D sont alignés.

Exercice 4

1)



2) On a dans le cercle $\mathscr{C}$,$\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}}\right)$ sont deux angles inscrits et qui interceptent le même arc $\overset{\frown}{AB}$ et $C \in \overset{\frown}{BA}$ et $C \in \overset{\frown}{BA}$ alors $\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}}\right)[2\pi]$

or $N \in [AC]$ et $N \in [BD]$ alors $\left(\widehat{\overrightarrow{CN},\overrightarrow{CB}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{NB}}\right)[2\pi]$

alors $\left(\widehat{\overrightarrow{CN}, \overrightarrow{CB}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{NB}}\right) [2\pi]$ (car $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires et de même sens)

$\Leftrightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{CN}, \overrightarrow{CB}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BN}}\right)$ $[2\pi]$. Alors le triangle BNC est isocèle en N.

3) $\left(\widehat{\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{DB}}\right)$ $[2\pi] \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{DB}}\right)$ $[2\pi]$

$$\equiv \left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}}\right) \; [2\pi]$$

$$\equiv 2\left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}\right) \; [2\pi]$$

or dans le cercle $\mathcal{C}$, $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ est un angle inscrit et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ est un angle au centre et qui interceptent le même arc $\overset{\frown}{AB}$ alors $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right) \equiv 2\left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}\right)$ $[2\pi]$

alors $\left(\widehat{\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right)$ $[2\pi]$

4) a) On adans le cercle $\mathcal{C}$', $(\overrightarrow{NB}, \overrightarrow{NE})$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AN})$ sont deux angles inscrits et qui interceptent le même arc $\overset{\frown}{BN}$ alors $\left(\widehat{\overrightarrow{NB}, \overrightarrow{NE}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AN}}\right) [2\pi] \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) [2\pi]$

et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC})$ sont deux angles inscrits et qui interceptent le même arc $\overset{\frown}{BC}$ et $A \in \overset{\frown}{CB}$ et $D \in \overset{\frown}{CB}$ alors $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}}\right) [2\pi]$

alors $\left(\widehat{\overrightarrow{NB}, \overrightarrow{NE}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}}\right)$ $[2\pi]$.

b) On a $\left(\widehat{\overrightarrow{NB}, \overrightarrow{NE}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}}\right)$ $[2\pi] \Leftrightarrow$ $\left(\widehat{\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{NE}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}}\right)$ $[2\pi]$

alors $\overrightarrow{NE}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont colinéaires donc $(NE)//(DC)$ et $N \in \Delta$ et $E \in \Delta$ alors $\Delta//(DC)$.

5) a) On a $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AB})$ et $(\overrightarrow{NI}, \overrightarrow{AB})$ sont deux angles inscrits et qui interceptent le même arc $\overset{\frown}{IB}$ et $N \in \overset{\frown}{BI}$ et $A \in \overset{\frown}{BI}$ alors $2\left(\widehat{\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AB}}\right) \equiv 2\left(\widehat{\overrightarrow{NI}, \overrightarrow{AB}}\right) [2\pi]$

$\Leftrightarrow 2\left(\widehat{\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AB}}\right) \equiv 2\left(\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{AB}}\right) [2\pi]$ (car $\overrightarrow{NI}$ et $\overrightarrow{DA}$ sont colinéaires et de même sens) or $2\left(\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{AB}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right)$ $[2\pi]$ alors $2\left(\widehat{\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AB}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right)$ $[2\pi]$.

b) Dans le cercle $\mathcal{C}$ on a $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AB})$ est un angle inscrit et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ est un angle au centre et qui interceptent le même arc $\overset{\frown}{AB}$ et $2\left(\widehat{\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AB}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right)$ $[2\pi]$

alors (AI) est tangente au cercle $\mathcal{C}$ en A.