Proposée par Kooli Mohamed Hechmi

Exercice 1

1) a) La droite d'équation $y = 1$ est une asymptote à (C_f) au voisinage de $-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$

donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - 1 = 0^-$ car pour tout $x \le 0$ on a (C_f) est au-dessous de la droite d'équation $y = 1$

ainsi $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{f(x)-1} = -\infty$

La droite d'équation Δ: $y = 2x - 3$ est une asymptote à (C_f) au voisinage de $+\infty$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - 2x] = -3$

on a pour tout $x \in [0, +\infty[$ (C_f) Δ est au-dessus Δ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - 2x + 3 = 0^+$

ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)-2x+3} = +\infty$

b)

	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

c) On a pour tout $x \in]-\infty, 0] \cup [3, +\infty[$ la courbe (C_f) est au-dessus de D

et pour tout $x \in [0, 2]$ la courbe (C_f) est au-dessous de D d'où le signe de $f(x) - x$ sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f(x) - x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2) On a : $g(x) = \frac{x}{3-x}$ pour tout $x \in]-\infty, 3[$

a) On a : g est dérivable sur $]-\infty, 3[$

pour tout $x \in]-\infty, 3]$ on a : $g'(x) = \frac{3-2x}{(3-x)^2}$ donc $g'(x)$ prend le signe de $3 - 2x$ sur $]-\infty, 3[$

$x < 3 \Rightarrow -2x > -3 \Rightarrow 3 - 2x > 0$ donc pour tout $x \in]-\infty, 3[$ on a $g'(x) > 0$ donc g est strictement croissante sur $]-\infty, 3[$

On a f est continue sur $\mathbb{R}$

on a g est continue et strictement croissante sur $]-\infty, 3[$ donc g est continue et strictement croissante sur $[0, 1]$ ainsi $g([0, 1]) = [g(0), g(1)] = \left[0, \frac{1}{2}\right]$ inclus dans $\mathbb{R}$

donc $f\ o\ g$ est continue $[0, 1]$

b) Soient deux réels a et b tel que $0 \le a < b \le 1$ on a g est strictement croissante sur $[0, 1]$

donc $g(0) \leq g(a) < g(b) \leq g(1) \Rightarrow 0 \leq g(a) < g(b) \leq \frac{1}{2}$

or f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ donc f est strictement croissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

ainsi $f(g(a)) < f(g(b))$ donc $(f \circ g)(a) < (f \circ g)(b)$ donc la fonction $f \circ g$ est strictement

croissante sur $[0, 1]$

c) On a: $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -x \leq 0 \Rightarrow 2 \leq 3 - x \leq 3 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{3-x} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq \frac{x}{3-x} \leq \frac{x}{2} \Rightarrow$

$0 \leq g(x) \leq \frac{x}{2} \Rightarrow -x \leq g(x) - x \leq \frac{x}{2} - x \Rightarrow g(x) - x \leq -\frac{x}{2} \leq 0$

donc pour tout $x \in [0, 1]$ on a : $g(x) \leq x$

pour tout $x \in [0, 1]$ on a : $g(x) \leq x$ et f est strictement croissante sur $[0, 1]$

donc pour tout $x \in [0, 1]$ $f(g(x)) \leq f(x) \leq x$ ainsi $(f \circ g)(x) \leq x$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(f \circ f)(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(f(x))}{f(x)} \times \frac{f(x)}{x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(f(x))}{f(x)} = 2$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(f(x))}{f(x)} \times \frac{f(x)}{x} = 4$

ainsi $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(f \circ f)(x)}{x} = 4$

$\lim\limits_{x \to +\infty} [(f \circ f)(x) - 2f(x)] = \lim\limits_{x \to +\infty} [f(f(x)) - 2f(x)]$

on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - 2x] = -3$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(f(x)) - 2f(x)] = -3$

$\lim\limits_{x \to 0^+} x f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$ on a : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 2$

ainsi $\lim\limits_{x \to 0^+} x f\left(\frac{1}{x}\right) = 2$

4) $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = (f \circ g)(U_n) \end{cases}$ $n \in \mathbb{N}$

a) Pour $n = 0$ on a $U_0 = 1$ donc $0 \leq U_0 \leq 1$ vrai

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $0 \leq U_n \leq 1$ et montrons que $0 \leq U_{n+1} \leq 1$

On a $0 \leq U_n \leq 1$ et la fonction $f \circ g$ est strictement croissante sur $[0, 1]$

donc $(f \circ g)(0) \leq (f \circ g)(U_n) \leq (f \circ g)(1) \Rightarrow (f \circ g)(0) \leq U_{n+1} \leq (f \circ g)(1)$

on a : $(f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(0) = 0$ et $(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f\left(\frac{1}{2}\right) < f(1) = 0,6$

ainsi $0 \leq U_{n+1} \leq 0,6 < 1$ donc $0 \leq U_{n+1} \leq 1$

conclusion pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq U_n \leq 1$

b) On a : pour tout $x \in [0, 1]$; $(f \circ g)(x) \leq x$ or $U_n \in [0, 1]$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ $(f\ o\ g)(U_n) \leq U_n \Rightarrow U_{n+1} \leq U_n$

ainsi la suite (U_n) est décroissante et comme (U_n) est minorée par 0 donc la suite (U_n) est convergente et converge vers un réel L

c) On a : la fonction $f\ o\ g$ est continue sur $[0,1]$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = L$; $0 \leq L \leq 1$ donc $f\ o\ g$ est continue en L

$(f\ o\ g)(U_n) = U_{n+1}$ donc $(f\ o\ g)(L) = L$ ainsi $L = 0$ d'après 2) ; b)

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

Exercice 2

1) On a : $f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$; $x \in [0,+\infty[$

a) La fonction f est dérivable sur $[0,+\infty[$ et pour tout $x \in [0,+\infty[$ on a:

$f'(x) = \frac{-(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{-2x-1}{(x^2+x+1)^2}$ donc $f'(x)$ prend le signe de $-1-2x$ sur $[0,+\infty[$

$x \geq 0 \Rightarrow -2x \leq 0 \Rightarrow -2x-1 \leq -1 \Rightarrow -2x-1 < 0$

donc pour tout $x \in [0,+\infty[$ on a: $f'(x) < 0$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0

$f(0) = 1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2+x+1} = 0$

b) On a pour tout $x \geq 0$

$f(x) - (1-x) = \frac{1}{1+x+x^2} - (1-x) = \frac{1}{1+x+x^2} - \frac{(1-x)(1+x+x^2)}{1+x+x^2} = \frac{1-(1+x+x^2-x-x^2-x^3)}{1+x+x^2} = \frac{x^3}{1+x+x^2} \geq 0$

donc pour tout $x \geq 0$ on a : $f(x) - (1-x) \geq 0$ ainsi $f(x) \geq 1-x$ (1)

$f(x) - 1 = \frac{1}{1+x+x^2} - 1 = \frac{1}{1+x+x^2} - \frac{1+x+x^2}{1+x+x^2} = \frac{-x-x^2}{1+x+x^2} \leq 0$

donc pour tout $x \geq 0$ on a : $f(x) - 1 \leq 0$ ainsi $f(x) \leq 1$ (2)

de (1) et (2) on a pour tout $x \geq 0$: $1 - x \leq f(x) \leq 1$

2) a) On a : $1 \leq k \leq n \Rightarrow n+1 \leq n+k \leq 2n \Rightarrow \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n+k} \leq \frac{1}{n+1} \Rightarrow$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2n}\right) \le \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n+k}\right) \le \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n+1}\right) \;\Rightarrow\; n\left(\frac{1}{2n}\right) \le \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n+k}\right) \le n\left(\frac{1}{n+1}\right) \;\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \le \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n+k}\right) \le n\left(\frac{1}{n+1}\right) \;\Rightarrow\; \frac{1}{2n} \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n+k}\right) \le \frac{1}{n+1} \;\Rightarrow\; \frac{1}{2n} \le U_n \le \frac{1}{n-1}$$

b) On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $\frac{1}{2n} \le U_n \le \frac{1}{n+1}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

3) **a)** On a pour tout $x \ge 0$: $1 - x \le f(x) \le 1$ or pour tout $1 \le k \le n$ on a : $\frac{1}{n+k} > 0$

donc pour tout $1 \le k \le n$ on a : $1 - \frac{1}{n+k} \le f\left(\frac{1}{n+k}\right) \le 1$

$$1 - \frac{1}{n+k} \le f\left(\frac{1}{n+k}\right) \le 1 \;\Rightarrow\; \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{n+k}\right) \le \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{n+k}\right) \le \sum_{k=1}^{n} 1 \;\Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{1} 1 - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n+k}\right) \le \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{n+k}\right) \le \sum_{k=1}^{n} 1 \;\Rightarrow\; n - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n+k}\right) \le \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{n+k}\right) \le n \;\Rightarrow$$

$$1 - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n+k}\right) \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{n+k}\right) \le 1 \;\Rightarrow\; 1 - U_n \le W_n \le 1$$

b) on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $1 - U_n \le W_n \le 1$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(1 - U_n) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = 1$

Exercice 3

1) On a: $z_A = 2$; $z_B = 5 + 2i$ et $z_C = 3 + 5i$

a) On a : $\frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{CB}}} = \frac{z_B - z_A}{z_B - z_C} = \frac{5+2i-2}{5+2i-3-5i} = \frac{3+2i}{2-3i} = \frac{(3+2i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{6+9i+4i-6}{4+9} = \frac{13i}{13} = i$

$$\frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{CB}}} = i \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{CB}}}\right| = |i| \\ arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{CB}}}\right) \equiv arg(i) \equiv [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|z_{\overrightarrow{AB}}|}{|z_{\overrightarrow{CB}}|} = 1 \\ arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_B - z_C}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{AB}{CB} = 1 \\ \left(\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AB}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} AB = CB \\ \left(\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AB}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$$

ainsi le triangle ABC est isocèle et rectangle en B.

a) On a ABC est isocèle et rectangle en B pour que $ABCD$ soit un carré il faut que $ABCD$ soit un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{CD}} = z_{\overrightarrow{BA}} \Leftrightarrow z_D - z_C = z_A - z_B$

donc $z_D = z_C + z_A - z_B \quad z_D = 3 + 5i + 2 - 5 - 2i$ ainsi $z_D = 3i$

2) Pour $z \ne 3i$ on a : $M(z)$ et $M'(z')$ tel que $z' = \frac{2z-4}{z-3i}$

a) On a : $DM \times AM' = |z_M - z_D| \times |z_{M'} - z_A| = |z - 3i| \times |z' - 2|$

$z^5 = 4\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}} = 4\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right)} = ;\ k \in \{0\,,1\,,\dots,4\}$

$z_k = \sqrt[5]{4\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{-\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{5}\right)} = \sqrt[5]{\sqrt{2}^5}\,e^{i\left(\frac{-3\pi+8k\pi}{20}\right)} = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{-3\pi+8k\pi}{20}\right)}$

$z_0 = \sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{20}}\ ;\ z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{10}}\ ;\ z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{13\pi}{20}}\ ;\ z_3 = \sqrt{2}e^{i\frac{21\pi}{20}}\ ;\ z_4 = \sqrt{2}e^{i\frac{29\pi}{20}}$

ainsi les racines cinquième de $-4-4i$

sont : $\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{20}}\ ;\ \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{20}}\ ;\ \sqrt{2}e^{i\frac{13\pi}{20}}\ ;\ \sqrt{2}e^{i\frac{21\pi}{20}}$ **et** $\sqrt{2}e^{i\frac{29\pi}{20}}$

c) $(E_1):\ z^{10} + (4+3i)z^5 + 4 - 4i = 0$

posons $Z = z^5$ **l'équation** (E_1) **est équivalente à** $Z^2 + (4+3i)Z + 4 - 4i = 0$

donc $Z = i$ **ou** $Z = -4-4i$ **ainsi** $z^5 = i$ **ou** $z^5 = -4-4i$

$$S_{\mathbb{C}} = \left\{e^{i\frac{\pi}{10}}\ ;\ e^{i\frac{\pi}{2}}\ ;\ e^{i\frac{9\pi}{10}}\ ;\ e^{i\frac{13\pi}{10}};\ e^{i\frac{17\pi}{10}};\ \sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{20}};\ \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{20}};\ \sqrt{2}e^{i\frac{13\pi}{20}};\ \sqrt{2}e^{i\frac{21\pi}{20}}\ \text{et}\ \sqrt{2}e^{i\frac{29\pi}{20}}\right\}$$

d) $(E_2):\ z^2 + (4+3i)e^{i\alpha}z + (4-4i)e^{2i\alpha} = 0\ ;\ \alpha \in \,]-\pi\,,\pi[$

$\Delta = [(4+3i)e^{i\alpha}]^2 - 4(4-4i)e^{2i\alpha} = (7+24i)e^{2i\alpha} + (-16+16i)e^{2i\alpha}$

$= (-9+40i)e^{2i\alpha} = (-9+40i)e^{2i\alpha} = (4+5i)^2e^{2i\alpha} = [(4+5i)e^{i\alpha}]^2$

donc une racine carrée de Δ **est** $\delta = (4+5i)e^{i\alpha}$

$z = \frac{-(4+3i)e^{i\alpha}+(4+5i)e^{i\alpha}}{2} = e^{i\alpha}$ **ou** $z = \frac{(-4-3i)e^{i\alpha}-(4+5i)e^{i\alpha}}{2} = (-4-4i)e^{i\alpha}$

$S_{\mathbb{C}} = \{e^{i\alpha}\,,(-4-4i)e^{i\alpha}\}\ ;\ \alpha \in \,]-\pi\,,\pi[$

2) $(E'):\ z^3 + (5+3i)z^2 + (8-i)z + 4 - 4i = 0$

a) Soit $z_0 = \alpha\ ;\ (\alpha \in \mathbb{R})$ **la solution réelle de** (E') **donc**

$\alpha^3 + (5+3i)\alpha^2 + (8-i)\alpha + 4 - 4i = 0\ ;\ \alpha^3 + 5\alpha^2 + 3i\alpha^2 + 8\alpha - i\alpha + 4 - 4i = 0$

$\alpha^3 + 5\alpha^2 + 8\alpha + 4 + (3\alpha^2 - \alpha - 4)i = 0$ **donc** $\begin{cases} 3\alpha^2 - \alpha - 4 = 0 & (1) \\ \alpha^3 + 5\alpha^2 + 8\alpha + 4 = 0 & (2) \end{cases}$

(1): $3\alpha^2 - \alpha - 4 = 0;\ \alpha = -1$ **ou** $\alpha = \frac{3}{4}$

pour $\alpha = -1$ **on a :** $(-1)^3 + 5(-1)^2 + 8(-1) + 4 = -1 + 5 - 8 + 4 = 0$

donc $\alpha = -1$ **est solution de** (2)

pour $\alpha = \frac{3}{4}$ **on a :** $\left(\frac{3}{4}\right)^3 + 5\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 8 \times \frac{3}{4} + 4 \neq 0$

donc $\alpha = \frac{3}{4}$ **n'est pas une solution de** (2)

ainsi $\alpha = -1$ **d'où** $z_0 = -1$

b) Déterminons 3 nombres complexes a ; b et c tel que

$z^3+(5+3i)z^2+(8-i)z+4-4i=(z+1)(az^2+bz+c)$

$$(z+1)(az^2+bz+c)=az^3+bz^2+cz+az^2+bz+c$$
$$=az^3+(b+a)z^2+(c+b)z+c$$

Par identification on a : $\begin{cases}a=1\\ b+a=5+3i\\ c+b=8-i\\ c=4-4i\end{cases}$; $\begin{cases}a=1\\ b=4+3i\\ c+b=4+3i+4-4i=8-i\\ c=4-4i\end{cases}$

donc $a=1$; $b=4+3i$ et $c=4-4i$

ainsi $z^3+(5+3i)z^2+(8-i)z+4-4i=(z+1)(z^2+(4+3i)z+4-4i)$

$z^3+(5+3i)z^2+(8-i)z+4-4i=0 \iff (z+1)(z^2+(4+3i)z+4-4i)=0$

donc $z+1=0$ ou $z^2+(4+3i)z+4-4i=0$ ainsi $z=-1$ ou $z=-4-4i$ ou $z=i$

$S_{\mathbb{C}}=\{-1\ ;\ -4-4i\ ; i\}$

3) a) pour $\theta\in\,]0\,,\pi[$; on a : $\frac{z+i}{z-i}=e^{i\theta} \iff z+i=(z-i)e^{i\theta} \iff z+i=ze^{i\theta}-ie^{i\theta} \iff$

$$z\left(e^{i\theta}-1\right)=i\left(e^{i\theta}+1\right) \iff z=\frac{i\left(e^{i\theta}+1\right)}{e^{i\theta}-1}=\frac{ie^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)}=\frac{2i\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}=\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}=\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

b) $(z^2+1)^5=i(z-i)^{10} \iff (z^2-i^2)^5=i(z-i)^{10} \iff [(z-i)(z+i)]^5=i(z-i)^{10} \iff$

$(z-i)^5(z+i)^5=i(z-i)^5(z-i)^5$ on remarque bien que i est une solution de l'équation

pour $z\neq i$ on a $\frac{(z-i)^5(z+i)^5}{(z-i)^5(z-i)^5}=i$ donc $\frac{(z+i)^5}{(z-i)^5}=i \iff \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^5=e^{i\frac{\pi}{2}}$

ainsi $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^5=\left(e^{i\frac{\pi}{10}}\right)^5$ donc $\frac{z+i}{z-i}=e^{i\frac{\pi}{10}} \iff z=\cot\left(\frac{\pi}{20}\right)$ car $\frac{\pi}{10}\in\,]0\,,\pi[$

ou $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^5=\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^5$ donc $\frac{z+i}{z-i}=e^{i\frac{\pi}{2}} \iff z=\cot\left(\frac{\pi}{4}\right)$ car $\frac{\pi}{2}\in\,]0\,,\pi[$

ou $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^5=\left(e^{i\frac{9\pi}{10}}\right)^5$ donc $\frac{z+i}{z-i}=e^{i\frac{9\pi}{10}} \iff z=\cot\left(\frac{9\pi}{20}\right)$ car $\frac{9\pi}{10}\in\,]0\,,\pi[$

ou $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^5=\left(e^{i\frac{13\pi}{10}}\right)^5$ donc $\frac{z+i}{z-i}=e^{i\frac{13\pi}{10}}$ à rejeter car $\frac{13\pi}{10}\notin\,]0\,,\pi[$

ou $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^5=\left(e^{i\frac{17\pi}{10}}\right)^5$ donc $\frac{z+i}{z-i}=e^{i\frac{17\pi}{10}}$ à rejeter car $\frac{17\pi}{10}\notin\,]0\,,\pi[$

ainsi $S_{\mathbb{C}}=\left\{\cot\left(\frac{\pi}{20}\right)\ ;\cot\left(\frac{\pi}{4}\right)\ ;\ \cot\left(\frac{9\pi}{20}\right); i\right\}$

$$= \left|(z-3i)\left(\frac{2z-4}{z-3i}-2\right)\right| = \left|(z-3i)\left(\frac{2z-4-2z+6i}{z-3i}\right)\right|$$

$$= |-4+6i| = \sqrt{16+36} = \sqrt{52} = \sqrt{4\times 13} = 2\sqrt{13}$$

On a M varie sur le cercle (Γ) de centre D et de rayon 2 $\Leftrightarrow MD = 2$ or $MD \times AM' = 2\sqrt{13}$ donc

$AM' = \sqrt{13}$ ainsi M' varie sur le cercle (Γ') de centre A et de rayon $\sqrt{13}$

b) Pour $z \neq 3i$ on a : M' varie sur le cercle (C') de centre O et de rayon 2

donc $OM' = 2$ donc $|z'| = 2$ donc $\left|\frac{2z-4}{z-3i}\right| = 2 \Leftrightarrow \left|\frac{2(z-2)}{z-3i}\right| = 2 \Leftrightarrow \frac{2|z_M-z_A|}{|z_M-z_D|} = 2 \Leftrightarrow$

$\frac{AM}{DM} = 1 \Leftrightarrow AM = DM$ ainsi M varie sur la médiatrice du segment $[AD]$

c) On a : $(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) \equiv arg(z')\,[2\pi] \equiv arg\left(\frac{2z-4}{z-3i}\right)[2\pi]$

$$\equiv arg\left(\frac{2(z-2)}{z-3i}\right)[2\pi] \equiv arg(2) + arg\left(\frac{z-2}{z-3i}\right)[2\pi]$$

$$\equiv arg\left(\frac{z-2}{z-3i}\right)[2\pi] \equiv arg\left(\frac{z_M-z_A}{z_M-z_D}\right)[2\pi] \quad ; \quad (\,arg(2) \equiv 0\,[2\pi]\,)$$

$$\equiv \left(\widehat{\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{AM}}\right)[2\pi] \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{MA}}\right)[2\pi]$$

On a : M' varie sur $(O, \vec{v}) \Leftrightarrow (\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\left(\widehat{\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{MA}}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ ainsi M varie sur le cercle (C) de diamètre $([AD])$

Exercice 4

1) (E) : $z^2 + (4+3i)z + 4 - 4i = 0$

a) $\Delta = (4+3i)^2 - 4(4-4i) = 16 + 24i - 9 - 16 + 16i = -9 + 40i$

$$= 16 - 25 + 40i = 16 + 40i - 25 = 4^2 + 2\times 4\times 5i + (5i)^2$$

$= (4+5i)^2$ donc une racine carrée de Δ est $\delta = 4 + 5i$

$z = \frac{-4-3i-4-5i}{2} = -4-4i$ ou $z = \frac{-4-3i+4+5i}{2} = i$

$S_{\mathbb{C}} = \{-4-4i\,, i\}$

b) Soit $z^5 = i$ tel que $z \in \mathbb{C}$

$$z^5 = i = e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)} \;;\; k \in \{0, 1, \dots, 4\} \;;\; z_k = e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{5}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi+4k\pi}{10}\right)}$$

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{10}} \;;\; z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} \;;\; z_2 = e^{i\frac{9\pi}{10}} \;;\; z_3 = e^{i\frac{13\pi}{10}} \;;\; z_4 = e^{i\frac{17\pi}{10}}$$

ainsi les racines cinquième de i sont : $e^{i\frac{\pi}{10}}$; $e^{i\frac{\pi}{2}}$; $e^{i\frac{9\pi}{10}}$; $e^{i\frac{13\pi}{10}}$ et $e^{i\frac{17\pi}{10}}$

Soit $z^5 = -4-4i = 4\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right) = 4\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$; $z \in \mathbb{C}$