UNE CORRECTION POSSIBLE du devoir de contrôle n°1 de Mr Mr Adam K du 28 /10 / 16

Proposée par Kooli Mohamed Hechmi

http://mathematiques.kooli.me/

Exercice 1

$f([-1\,,1]) = [-1\,,1] \qquad (f\ o\ g)(]-\infty\,,1]) = f([-1\,,0[\,) =]0\,,1]$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(g\ o\ f)(x) = 0 \qquad \lim\limits_{x\to-\infty}(f\ o\ g)(x) = 0$

Exercice 2

1) $U_1 = 1$ donc $\quad 0 \le U_1 \le 3$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ supposons que $0 \le U_n \le 3$, montrons que $0 \le U_{n+1} \le 3$

$0 \le U_n \le 3 \Rightarrow 0 \le 3U_n \le 9 \Rightarrow 0 \le \sqrt{3U_n} \le 3 \Rightarrow 0 \le U_{n+1} \le 3$

Conclusion $\forall n \in \mathbb{N}^*\ 0 \le U_n \le 3$

2) $U_{n+1} - U_n = \sqrt{3U_n} - U_n = \dfrac{\left(\sqrt{3U_n} - U_n\right)\left(\sqrt{3U_n} + U_n\right)}{\sqrt{3U_n} + U_n} = \dfrac{3U_n - U_n^2}{\sqrt{3U_n} + U_n} = \dfrac{U_n(3 - U_n)}{\sqrt{3U_n} + U_n}$

Or $0 \le U_n \le 3 \quad \Rightarrow \quad -3 \le 3 - U_n \le 0 \Rightarrow \quad 3 - U_n < 0$

$U_n > 0$ et $\sqrt{3U_n} + U_n > 0$ alors $\dfrac{U_n(3 - U_n)}{\sqrt{3U_n} + U_n} < 0$ donc $U_{n+1} - U_n < 0$

Par suite la suite U est décroissante

3) La suite U est décroissante et minorée par 0 alors la suite U est convergente et converge vers un réel α

Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{3x} \quad f$ est continue sur $[0\,,3]$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \alpha\,;\ \ \alpha \in [0\,,3]$ alors f est continue en α

alors $f(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow \sqrt{3\alpha} = \alpha \Leftrightarrow 3\alpha = \alpha^2 \Leftrightarrow \alpha^2 - 3\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha(\alpha - 3) = 0$

alors $\alpha = 0$ ou $\alpha = 3$ or la suite U est décroissante donc $\alpha = 0$

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

Exercice 3

1) $U_{n+1} - U_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} - \left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n+1} > 0$

Donc la suite U est croissante

2) Pour $n=1$ $on\ a$ $U_2-U_1=1+\frac{1}{2}-1=\frac{1}{2}\geq\frac{1}{2}$ alors la proprieté et vraie pour $n=1$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ supposons que $U_{2n}-U_n\geq\frac{1}{2}$ et montrons que $U_{2n+2}-U_{n+1}\geq\frac{1}{2}$

$$U_{2n+2}-U_{n+1}=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}$$

$$=U_{2n}-U_n+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}$$

$$=U_{2n}-U_n+\frac{(2n+2)(n+1)}{(2n+1)(2n+2)(n+1)}+\frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+2)(n+1)}-\frac{(2n+1)(2n+2)}{(2n+1)(2n+2)(n+1)}$$

$$=U_{2n}-U_n+\frac{2n^2+4n+2+2n^2+3n+1-4n^2-6n-2}{(2n+1)(2n+2)(n+1)}$$

$$=U_{2n}-U_n+\frac{n+1}{(2n+1)(2n+2)(n+1)}$$

or $U_{2n}-U_n\geq\frac{1}{2}$ et $\frac{n+1}{(2n+1)(2n+2)(n+1)}>0$ alors $U_{2n+2}-U_{n+1}\geq\frac{1}{2}$

conclusion $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $U_{2n}-U_n\geq\frac{1}{2}$

3) Supposons que la suite U est majorée par un réel α

on a alors $\lim\limits_{n\to\infty}U_n=\alpha\ et\ \lim\limits_{n\to\infty}U_{2n}=\alpha$

ce qui donne $\lim\limits_{n\to+\infty}U_{2n}-U_n=0$ ce qui est absurde car $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $U_{2n}-U_n\geq\frac{1}{2}$

donc la suite U n'est pas majorée

4) La suite U est croissante et n'est pas majorée alors $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=+\infty$

Exercice 4

1) a) $f(C)=C'$ $\Leftrightarrow z_{C'}=\frac{z_C+1}{z_C-2i}=\frac{i+1}{i-2i}=\frac{1+i}{-i}=\frac{(1+i)i}{-i^2}=-1+i$

$z_{\overrightarrow{BC}}=z_C-z_B=i+1=1+i$ $\qquad z_{\overrightarrow{C'A}}=z_A-z_{C'}=2i+1-i=1+i$

On a alors $z_{\overrightarrow{BC}}=z_{\overrightarrow{C'A}}\Leftrightarrow\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{C'A}\Leftrightarrow ACBC'$ est un parallélogramme

b) Soit M un antécédent de C par f donc $f(C)=M\Leftrightarrow z_C=\frac{z_M+1}{z_M-2i}$

$\Leftrightarrow z_C(z_M-2i)=z_M+1\Leftrightarrow z_M(z_C-1)=2iz_C+1\Leftrightarrow z_M=\frac{2iz_C+1}{z_C-1}$

$\Leftrightarrow\ z_M = \dfrac{-1}{-1+i} \Leftrightarrow\ z_M = \dfrac{1+i}{2}$ alors le point C admet un unique antécédent C'' tel que $z''_C = \dfrac{1+i}{2}$

2) **a)** $M \in E \ \Leftrightarrow\ \dfrac{z+1}{z-2i}$ est un imaginaire non nul

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{z_M - z_B}{z_M - z_A} \text{ est un imaginaire non nul} \\ M \neq A \ \ et \ \ M \neq B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\widehat{\overrightarrow{MA}\,,\overrightarrow{MB}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi] \\ M \neq A \ \ et \ \ M \neq B \end{cases}$$

$\Leftrightarrow M$ apparient au cercle de diamètre $[AB]\backslash\{A\,,B\}$

b) $M \in F \ \Leftrightarrow\ M'$ apparient au cercle de centre O et de rayon $1 \Leftrightarrow OM' = 1$

$$\Leftrightarrow |z'| = 1 \ \Leftrightarrow \left|\dfrac{z+1}{z-2i}\right| = 1 \ \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{z_M - z_B}{z_M - z_A}\right| = 1 \\ M \neq A \ \ et \ \ M \neq B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{MB}{MA} = 1 \\ M \neq A \ \ et \ \ M \neq B \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} MB = MA \\ M \neq A \ \ et \ \ M \neq B \end{cases} \Leftrightarrow M$ appartient à la médiatrice du segment $[AB]$

Exercice 5

A/

1) $z^2 - 2e^{i\alpha}z + 2e^{i2\alpha} = 0 \qquad \alpha \in [0\ ,\ \pi]$

$a = 1\,; \quad b = -2e^{i\alpha}\,; \qquad c = 2e^{i2\alpha}$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4e^{i2\alpha} - 8e^{i2\alpha} = -4e^{i2\alpha} = \left(2ie^{i\alpha}\right)^2$ donc $\delta = 2ie^{i\alpha}$

$$z' = \frac{-b-\delta}{2a} = \frac{2e^{i\alpha} - 2ie^{i\alpha}}{2} = e^{i\alpha} - ie^{i\alpha} = (1-i)e^{i\alpha}$$

$$z'' = \frac{-b+\delta}{2a} = \frac{2e^{i\alpha} + 2ie^{i\alpha}}{2} = e^{i\alpha} + ie^{i\alpha} = (1+i)e^{i\alpha}$$

$S_C = \left\{(1-i)e^{i\alpha}\ ;\ (1+i)e^{i\alpha}\right\}$

2) $z' = (1-i)e^{i\alpha} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}e^{i\alpha} = \sqrt{2}e^{i\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}$

$z'' = (1+i)e^{i\alpha} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}e^{i\alpha} = \sqrt{2}e^{i\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}$

B/

$z_1 = (1-i)e^{i\alpha} \qquad z_2 = (1+i)e^{i\alpha}$

1) **a)** $\dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{(1-i)e^{i\alpha}}{(1+i)e^{i\alpha}} = \dfrac{\sqrt{2}e^{i\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2}e^{i\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}} = e^{i\left(\alpha-\frac{\pi}{4}-\alpha-\frac{\pi}{4}\right)} = e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$

b) $\frac{z_{\overrightarrow{OA}}}{z_{\overrightarrow{OB}}} = \frac{z_A}{z_B} = \frac{z_2}{z_1} = -i \in i\mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB} \quad (\mathbf{1})$

$\left|\frac{z_{\overrightarrow{OA}}}{z_{\overrightarrow{OB}}}\right| = \frac{|z_{\overrightarrow{OA}}|}{|z_{\overrightarrow{OB}}|} = \frac{|z_A - z_O|}{|z_B - z_o|} = \frac{OA}{OB}$ or $\left|\frac{z_{\overrightarrow{OA}}}{z_{\overrightarrow{OB}}}\right| = |-i| = 1$ alors $OA = OB \quad (\mathbf{2})$

de $(\mathbf{1})$ et $(\mathbf{2})$ le triangle OAB est rectangle isocèle en O

2) $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) \equiv arg(z_{\overrightarrow{AB}})[2\pi] \equiv arg(z_B - z_A)[2\pi] \equiv arg\left((1+i)e^{i\alpha} - (1-i)e^{i\alpha}\right)[2\pi]$

$\equiv arg(2ie^{i\alpha})[2\pi] \equiv arg\left(2e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\alpha}\right)[2\pi] \equiv arg\left(2e^{i\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}\right)[2\pi] \equiv \alpha + \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$

3) $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = (1+i)e^{i\alpha} - (1-i)e^{i\alpha} = 2ie^{i\alpha} = 2i(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

$= 2i\cos\alpha - 2\sin\alpha = -2\sin\alpha + 2i\cos\alpha$

Donc $\overrightarrow{AB}\binom{-2\sin\alpha}{2\cos\alpha}$ est un vecteur directeur de la droite (AB) et $\vec{u}\binom{1}{1}$ est un vecteur de la droite d'équation $y = x$

Pour que la droite (AB) soit parallèle à la droite d'équation $y = x$ il faut que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ soient colinéaires $\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AB}, \vec{u}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -2\sin\alpha & 1 \\ 2\cos\alpha & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow -2\sin\alpha - 2\cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \sin\alpha + \cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \sin\alpha = -\cos\alpha$

$\Leftrightarrow sin\,\alpha = cos(\pi - \alpha) \Leftrightarrow cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = cos(\pi - \alpha)$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \alpha \equiv \pi - \alpha\,[2\pi] \quad ou \quad \frac{\pi}{2} - \alpha \equiv -\pi + \alpha\,[2\pi]$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \equiv 0\,[2\pi]$ ce qui est impossible ou $2\alpha \equiv \frac{3\pi}{2}[2\pi]$ alors $\alpha \equiv \frac{3\pi}{4}[2\pi]$

$or\ \alpha \in [0\ ,\pi]$ donc $\alpha = \frac{3\pi}{4}$