Proposée par Kooli Mohamed Hechmi

http://mathematiques.kooli.me/

Exercice 1

1) $(E): iz^2 - 3iz + 3i - 1 = 0$

$a = i\ ;\quad b = -3i\ ;\quad c = 3i - 1$

$\Delta = b^2 - 4a = (-3i)^2 - 4i(3i - 1) = -9 + 12 + 4i = 3 + 4i = 2^2 + 2 \times 2 \times i + i^2$

$= (2 + i)^2$ donc $\delta = 2 + i$

$$z' = \frac{-b - \delta}{2a} = \frac{3i - 2 - i}{2i} = \frac{-2 + 2i}{2i} = \frac{-1 + i}{i} = 1 + i$$

$$z'' = \frac{-b + \delta}{2a} = \frac{3i + 2 + i}{2i} = \frac{2 + 4i}{2i} = \frac{1 + 2i}{i} = 2 - i$$

Alors $S_{\mathbb{C}} = \{1 + i\ ;\ 2 - i\}$

2) a) $f(z) = iz^3 + (1 - 3i)z^2 - (4 - 3i)z + 3 + i$

Soit $z_0 = \alpha i$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) une solution imaginaire pure de l'équation $f(z) = 0$

On a $f(z) = 0 \Leftrightarrow i(i\alpha)^3 + (1 - 3i)(i\alpha)^2 - (4 - 3i)i\alpha + 3 + i = 0$

$\Leftrightarrow \alpha^3 - \alpha^2(1 - 3i) - 4i\alpha - 3\alpha + 3 + i = 0$

$\Leftrightarrow \alpha^3 - \alpha^2 + 3i\alpha - 4i\alpha - 3\alpha + 3 + i = 0$

$\Leftrightarrow \alpha^3 - \alpha^2 - 3\alpha + 3 + (-\alpha + 1)i = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha + 1 = 0 & (1) \\ \alpha^3 - \alpha^2 - 3\alpha + 3 = 0 & (2) \end{cases}$$

$\alpha = 1$ est une solution de l'équation (2) donc $z_0 = i$ est l'unique solution imaginaire pure de l'équation $f(z) = 0$

b) On a $f(z) = iz^3 + (1 - 3i)z^2 - (4 - 3i)z + 3 + i$

$f(z) = (z - i)(az^2 + bz + c) = az^3 + bz^2 + cz - iaz^2 - ibz - ic$

$= az^3 + (b - ia)z^2 + (c - ib)z - ic$

Par identification on a : $\begin{cases} a = i \\ b - ia = 1 - 3i \\ c - ib = -4 + 3i \\ -ic = 3 + i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = i \\ b = -3i \\ c = -1 + 3i \\ -ic = 3 + i \end{cases}$

Donc $a = i\ ;\ b = -3i$ et $c = -1 + 3i$

Alors $f(z) = (z - i)(iz^2 - 3iz + 3i - 1)$

c) $f(z)=0 \Leftrightarrow (z-i)(iz^2-3iz+3i-1)=0$

alors $z-i=0$ ou $iz^2-3iz+3i-1=0$ alors $z=0$ ou $z=1+i$ ou $z=2-i$

donc $S_{\mathbb{C}}=\{i\,;\,1+i\,;\,2-i\}$

3) a) $1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2e^{i\frac{\pi}{3}}$

b) $\mathbf{3+i\sqrt{3}}=2+1+i\sqrt{3}=2+2e^{i\frac{\pi}{3}}=2\left(1+e^{i\frac{\pi}{3}}\right)=2\left(e^{i0}+e^{i\frac{\pi}{3}}\right)$

$$=2e^{i\frac{\pi}{6}}\left(e^{-i\frac{\pi}{6}}+e^{i\frac{\pi}{6}}\right)=2e^{i\frac{\pi}{6}}\left(e^{i\frac{\pi}{6}}+e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)=2e^{i\frac{\pi}{6}}2\cos\frac{\pi}{6}=4\frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}=2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$\mathbf{2i-\left(1+i\sqrt{3}\right)}=2e^{i\frac{\pi}{2}}-2e^{i\frac{\pi}{3}}=2\left(e^{i\frac{\pi}{2}}-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)$$

$$=2e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)}-e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)}\right)=2e^{i\frac{5\pi}{12}}\left(e^{i\frac{\pi}{12}}-e^{-i\frac{\pi}{12}}\right)$$

$$=2e^{i\frac{5\pi}{12}}2i\sin\frac{\pi}{12}=4e^{i\frac{5\pi}{12}}e^{i\frac{\pi}{2}}\sin\frac{\pi}{12}=4e^{i\frac{11\pi}{12}}\sin\frac{\pi}{12}=4\sin\frac{\pi}{12}e^{i\frac{11\pi}{12}}$$

Exercice 2

1) a) $z_A=\sqrt{3}+i$ $\quad z_B=\sqrt{3}+1+i\left(\sqrt{3}+1\right)$

$$\frac{z_{\overrightarrow{OB}}}{z_{\overrightarrow{OA}}}=\frac{z_B}{z_A}=\frac{\sqrt{3}+1+i\left(\sqrt{3}+1\right)}{\sqrt{3}+i}=\frac{\left[\sqrt{3}+1+i\left(\sqrt{3}+1\right)\right]\left(\sqrt{3}-i\right)}{\left(\sqrt{3}+i\right)\left(\sqrt{3}-i\right)}$$

$$=\frac{3-i\sqrt{3}+\sqrt{3}-i\sqrt{3}+1}{3+1}=\frac{4+\sqrt{3}-2i\sqrt{3}}{4}\notin\mathbb{R}$$

Donc $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ ne sont pas colinéaires par suite O , A et B ne sont pas alignés

b) On a G centre de gravité du triangle OAB donc $\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

donc $z_{\overrightarrow{GO}}+z_{\overrightarrow{GA}}+z_{\overrightarrow{GB}}=0$ donc $-z_G+z_A-z_G+z_B-z_G=0$

donc $-3z_G+z_A+z_B=0$ alors

$$z_G=\frac{z_A+z_B}{3}=\frac{\sqrt{3}+i+\sqrt{3}+1+i\left(\sqrt{3}+1\right)}{3}=\frac{1+2\sqrt{3}+i\left(\sqrt{3}+2\right)}{3}$$

c) $z_A=\sqrt{3}+i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=2e^{i\frac{\pi}{6}}$

2) a) $|z_C|=OC=OA=|z_A|=2$

$$\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}}\right)\equiv\frac{\pi}{6}\,[2\pi]\Leftrightarrow\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\vec{u}}\right)+\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OC}}\right)\equiv\frac{\pi}{6}\,[2\pi]\Leftrightarrow-\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OA}}\right)+\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OC}}\right)\equiv\frac{\pi}{6}\,[2\pi]$$

$\Leftrightarrow -arg(z_A) + arg(z_C) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi] \Leftrightarrow arg(z_C) \equiv arg(z_A) + \frac{\pi}{6} [2\pi]$

$\Leftrightarrow arg(z_C) \equiv \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\ [2\pi] \Leftrightarrow arg(z_C) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

b) $\begin{cases} |z_C| = 2 \\ arg(z_C) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow z_C = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}$

3) a) $z_{\overrightarrow{CB}} = z_B - z_C = \sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} + 1) - 1 - i\sqrt{3} = \sqrt{3} + i = z_A = z_{\overrightarrow{OA}}$

$z_{\overrightarrow{CB}} = z_{\overrightarrow{OA}} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow OABC$ est un parallélogramme (1)

$OA = OC \quad (2)$

De (1) et (2) $OABC$ est un losange

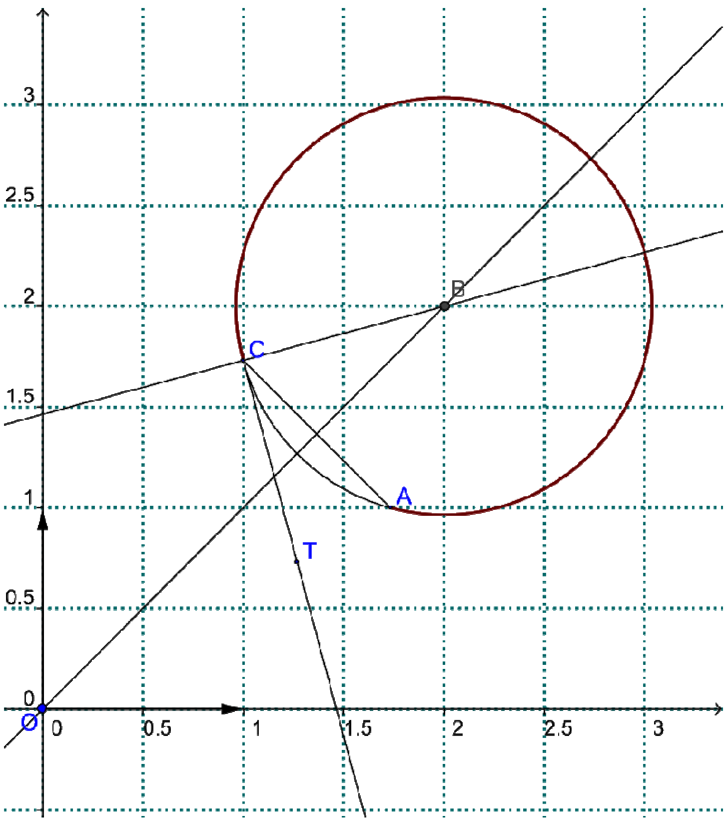
b) $\frac{z_{\overrightarrow{OA}}}{z_{\overrightarrow{OC}}} = \frac{z_A}{z_C} = \frac{\sqrt{3}+i}{1+i\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}+i)(1-i\sqrt{3})}{(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}-3i+i+\sqrt{3}}{1+3} = \frac{2\sqrt{3}-2i}{4} \notin i\mathbb{R}$ donc $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OC}$ ne sont pas orthogonaux alors $OABC$ n'est pas un carré

4)

$$M(z) \in E \Leftrightarrow \frac{z - z_A}{z - z_C} \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi] \Leftrightarrow \frac{z_M - z_A}{z_M - z_C} \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi] \Leftrightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$$

E est l'arc $[\overset{\frown}{CA}]$ privé des points A et C du cercle passant par A et C et tangent à (CT) en C tel que :

$\left(\widehat{\overrightarrow{CT}, \overrightarrow{CA}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$



Exercice 3

1) a) $\forall x \in [0\ ,\ \pi]\ ;\ g'(x) = (-9x\sin x - 9\cos x + 12)'$

$$= -9\sin x - 9x\cos x + 9\sin x$$

$$= -9x\cos x$$

b) Pour tout $x \in [0\ ,\ \pi]\ ;\ g'(x) = -9x\cos x$

alors $g'(x)$ est du signe de $-\cos x$ sur $[0\ ,\ \pi]$

x	0	α	$\frac{\pi}{2}$	β	π
$g'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	3 $\searrow$	0	$12-9\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$ 0	21

c) $g\left(\left[0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[12 - 9\frac{\pi}{2}\ ,3\right]$ $\qquad g\left(\left[\frac{\pi}{2}\ ,\ \pi\right]\right) = \left[12 - 9\frac{\pi}{2}\ ,21\right]$

d) g est continue et strictement décroissante sur $\left[0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right]$ et $0 \in \left[12 - 9\frac{\pi}{2}\ ,\ 3\right]$ alors $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\left[0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right]$

g est continue et strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2}\ ,\pi\right]$ et $0 \in \left[12 - 9\frac{\pi}{2}\ ,\ 21\right]$ alors $g(x) = 0$ admet une unique solution β dans $\left[\frac{\pi}{2}\ ,\pi\right]$

Conclusion : $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β dans $[0\ ,\pi]$

2) a) $\forall x \in]0\ ,+\infty[\quad -1 \le \cos x \le 1 \Rightarrow -3 \le 3\cos x \le 3 \Rightarrow -7 \le 3\cos x - 4 \le -1$

$\Rightarrow \dfrac{-7}{3x} \le \dfrac{3\cos x - 4}{3x} \le \dfrac{-1}{3x}$ (car $x \in]0\ ,+\infty[$) $\quad \Rightarrow \dfrac{-7}{3x} \le f(x) \le \dfrac{-1}{3x}$

b) $\forall x \in]-\infty\ ,0[\quad -1 \le \cos x \le 1 \Rightarrow -3 \le 3\cos x \le 3 \Rightarrow -7 \le 3\cos x - 4 \le -1$

$\Rightarrow \dfrac{-1}{3x} \le \dfrac{3\cos x - 4}{3x} \le \dfrac{-7}{3x}$ (car $x \in]-\infty\ ,0[$) $\quad \Rightarrow \dfrac{-1}{3x} \le f(x) \le \dfrac{-7}{3x}$

c) $\forall \boldsymbol{x} \in]\mathbf{0}\ ,+\infty[$

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{-7}{3x} \leq f(x) \leq \dfrac{-1}{3x} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-7}{3x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-1}{3x} = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

$$\left.\begin{array}{r}f(x) \leq \dfrac{-1}{3x} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-1}{3x} = -\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$$

$\forall \boldsymbol{x} \in \left]-\infty\ ,\mathbf{0}\right[$

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{-1}{3x} \leq f(x) \leq \dfrac{-7}{3x} \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-7}{3x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-1}{3x} = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

$$\left.\begin{array}{r}f(x) \geq \dfrac{-1}{3x} \\ \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-1}{3x} = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$$

3) a)

$$\forall x \in \left]0\ ,\ \pi\right];\ f'(x) = \left(\frac{3\cos x - 4}{3x}\right)' = \frac{-3\sin x(3x) - 3(3\cos x - 4)}{9x^2}$$

$$= \frac{-9\,x\sin x - 9\cos x + 12}{9x^2} = \frac{g(x)}{9x^2}$$

b) $\forall x \in \left]0\ ,\ \pi\right]\,;\ f'(x) = \frac{g(x)}{9x^2}$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ sur $\left]0\ ,\ \pi\right]$

x	0		α		β		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$f(\beta)$	$\searrow$	$\frac{-7}{3\pi}$