UNE CORRECTION POSSIBLE du devoir de contrôle n°1 de Mr K Yassine du 29 /10 / 16

Proposée par Kooli Mohamed Hechmi

http://mathematiques.kooli.me/

Exercice 1

1) a) $x \mapsto \frac{x^3+2}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (fonction rationnelle)

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \,;\; f'(x) = \left(\frac{x^3+2}{x}\right)' = \frac{3x^3 - x^3 - 2}{x^2} = \frac{2(x^3-1)}{x^2} = \frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{x^2}$$

b)

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \,;\; f'(x) = \frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{x^2}$$

Or $\forall x \in \mathbb{R}^*$ $\quad x^2 + x + 1 > 0$ $(\Delta = -3 < 0)$ et $x^2 > 0$ alors $f'(x)$ est du signe de $x - 1$ sur $\mathbb{R}^*$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+2}{x} = \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^3+2}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3+2}{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+2}{x} = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$$

c) $f(]-\infty \;,\; 0[\,) =]-\infty \;,+\infty[= \mathbb{R}$ $\qquad f([1 \;,+\infty[\,) = [3 \;,+\infty[$

$f([0 \;,+\infty[\,) = [3 \;,+\infty[$

2) a) $f(1) = 3$ $\quad f(2) = 5$ or $4 \in [3 \;,\; 5]$ et f est continue sur $[1 \;,\; 2]$ alors $f(x) = 4$ admet au moins une solution dans $[1 \;,\; 2]$

b) f est continue et strictement décroissante sur $[-2 \;,\; -1]$ $f(-2) = 3$ $f(-1) = -1$ or $0 \in [-1 \;,3]$ alors $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[-2 \;,\; -1]$

3) Soit la fonction g définie sur $[-2 \;,-1]$ par : $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x$; g est dérivable sur $[-2 \;,-1]$ et pour tout $x \in [-2 \;,-1]$

$g'(x) = \left(f(x) - \frac{1}{2}x\right)' = f'(x) - \frac{1}{2} < 0$ (car pour tout $x \in]-\infty\ ,\ 0[\ f'(x) < 0$)

g est continue et strictement décroissante sur $[-2\ ,-1]$ $g(-2) = f(-2) + 1 = 4$

$g(-1) = f(-1) + \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}$ or $0 \in \left[-\dfrac{1}{2}\ ,4\right]$

alors $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $[-2\ ,-1]$ par suite $f(x) - \frac{1}{2}x = 0$ admet une unique solution dans $[-2\ ,-1]$ donc $f(x) = \frac{1}{2}x$ admet une unique solution dans $[-2\ ,-1]$

Exercice 2

1) $U_1 = \dfrac{2U_0 + V_0}{3} = \dfrac{1}{3}$ $V_1 = \dfrac{3U_0 + 2V_0}{5} = \dfrac{2}{5}$

2) $U_0 < V_0$ la propriété est vraie pour $n = 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $U_n < V_n$, montrons que $U_{n+1} < V_{n+1}$

$$U_{n+1} - V_{n+1} = \frac{2U_n + V_n}{3} - \frac{3U_n + 2V_n}{5} = \frac{10U_n + 5V_n}{15} - \frac{9U_n + 6V_n}{15} = \frac{U_n - V_n}{15} < 0$$

alors $\forall n \in \mathbb{N}\ U_{n+1} < V_{n+1}$ conclusion $\forall n \in \mathbb{N}\ U_n < V_n$

3) $U_{n+1} - U_n = \dfrac{2U_n + V_n}{3} - U_n = \dfrac{-U_n + V_n}{3} > 0$ alors la suite U est croissante

$V_{n+1} - V_n = \dfrac{3U_n + 2V_n}{5} - V_n = \dfrac{3(U_n - V_n)}{5} < 0$ alors la suite V est décroissante

4) * On a $U_n < V_n$

* La suite U est croissante la suite V est décroissante

* Soit la suite T définie sur $\mathbb{N}$ par $T_n = U_n - V_n$ on a alors

$$T_{n+1} = U_{n+1} - V_{n+1} = \frac{U_n - V_n}{15} = \frac{T_n}{15}$$

Par suite la suite T est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{15}$ ($-1 < q < 1$) alors

$\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = 0$ ce qui donne $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n - V_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} V_n$

Donc les suites U et V admettent une même limite α

Conclusion les suites U et V sont convergentes et admettent la même limite α

5) a) $W_{n+1} = 9U_{n+1} + 5V_{n+1} = 9\left(\frac{2U_n + V_n}{3}\right) + 5\left(\frac{3U_n + 2V_n}{5}\right)$

$$= 3(2U_n + V_n) + 3U_n + 2V_n = 6U_n + 3V_n + 3U_n + 2V_n = 9U_n + 5V_n = W_n$$

Alors la suite W est une suite constante donc $W_n = 9U_0 + 5V_0 = 5$

b) $W_n = 5$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = 5$ ce qui donne $\lim\limits_{n\to+\infty} 9U_n + 5V_n = 5$

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} 9U_n + \lim\limits_{n\to+\infty} 5V_n = 5$

alors $9\alpha + 5\alpha = 14\alpha = 5$ donc $\alpha = \frac{5}{14}$

Exercice 3

1) a) Le triangle MNP est rectangle en P ssi $\frac{z_M - z_P}{z_N - z_P}$ est imaginaiure pur

ssi $\frac{z - z^3}{z^2 - z^3}$ est imaginaiure pur ssi $\frac{z(1-z^2)}{z^2(1-z)}$ est imaginaiure pur

ssi $\frac{(1-z)(1+z)}{z(1-z)}$ est imaginaiure pur ssi $\frac{1+z}{z}$ est imaginaiure pur

b) $\frac{1+z}{z} = \frac{1+x+iy}{x+iy} = \frac{(1+x+iy)(x-iy)}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x - iy + x^2 - ixy + -ixy + y^2}{x^2+y^2}$

$$= \frac{x^2 + y^2 + x - iy}{x^2 + y^2}$$

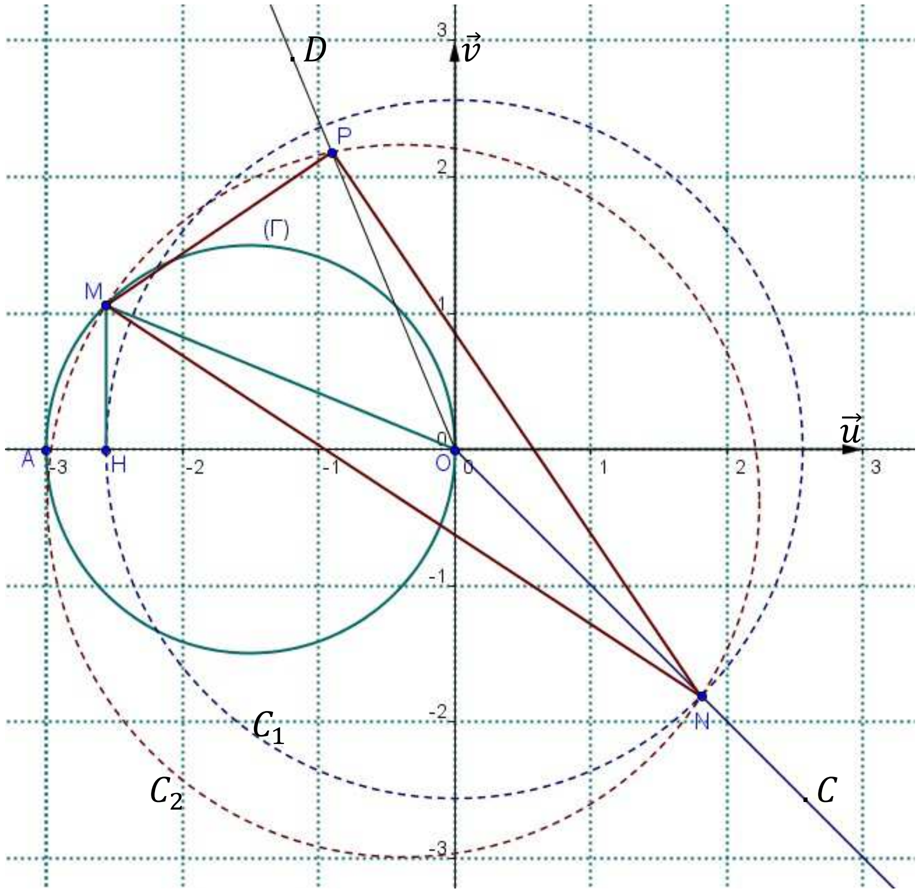
c) soit M un point du plan d'affixe z non nulle et différent de 1 et -1

$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow$ le triangle MNP est rectangle en P ssi $\frac{1+z}{z}$ est imaginaiure pur

ssi $\frac{x^2+y^2+x-iy}{x^2+y^2}$ est imaginaiure pur ssi $\begin{cases} x^2+y^2+x = 0 \\ M \neq O \\ M \neq A \end{cases}$ ssi $\begin{cases} \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \\ M \neq O \\ M \neq A \end{cases}$

ssi M appartient au cercle de centre $I\left(-\frac{1}{2}\ ,\ 0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$ privé des points O et A , or le point $I\left(-\frac{1}{2}\ ,\ 0\right)$ est le milieu du segment $[OA]$ et $OI = \frac{1}{4}$ donc M appartient au cercle de diamètre $[OA]$ alors (Γ) est le cercle de diamètre $[OA]$

2) a)



b) $\left(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{OM},\vec{u}}\right) + \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{ON}}\right)\ [2\pi] \equiv -\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}\right) + \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{ON}}\right)\ [2\pi]$

$\equiv -arg(z) + \arg(z^2)\ [2\pi] \equiv -arg(z) + 2arg(z)\ [2\pi]$

$\equiv arg(z)\ [2\pi] \equiv \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}\right)\ [2\pi]$

$\equiv \dfrac{7\pi}{8}\ [2\pi]$

$\left(\widehat{\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OP}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{ON},\vec{u}}\right) + \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OP}}\right)\ [2\pi] \equiv -\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{ON}}\right) + \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OP}}\right)\ [2\pi]$

$\equiv -\arg(z^2) + \arg(z^3)\ \ [2\pi] \equiv -2arg(z) + 3arg(z)\ [2\pi]$

$\equiv arg(z)\ [2\pi] \equiv \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}\right)\ [2\pi]$

$\equiv \dfrac{7\pi}{8}\ [2\pi]$

$ON = |z_N| = |z^2| = |z|^2 = OM^2$

c) On a M et H ont même abscisse et $H \in (O,\vec{u})$ donc $z_H = x$ avec $x < 0$ donc $OH = -x$

or $M \in (\Gamma)$ alors $x^2 + y^2 + x = 0$ donc $-x = x^2 + y^2$ et $OM = \sqrt{x^2 + y^2}$

donc $OH = OM^2$

d) On a : $\begin{cases} ON = OM^2 \\ OH = OM^2 \end{cases}$ donc $ON = OH$ alors N appartient au cercle C_1 de centre O et de rayon OH d'autre part $\left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}}\right) \equiv \frac{7\pi}{8}\ [2\pi]$ donc N appartient à la demi droite $[OC)$ tel que

$$\left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OC}}\right) \equiv \frac{7\pi}{8}\ [2\pi]$$

Conclusion : $N \in C_1 \cap [OC)$

Le triangle MNP est rectangle en P donc P appartient au cercle C_2 de diamètre $[MN]$ d'autre part $\left(\widehat{\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OP}}\right) \equiv \frac{7\pi}{8}\ [2\pi]$ donc P appartient à la demi droite $[OD)$ tel que

$$\left(\widehat{\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OD}}\right) \equiv \frac{7\pi}{8}\ [2\pi]$$

Conclusion : $P \in C_2 \cap [OD)$