Proposée par Kooli Mohamed Hechmi

Exercice 1

1) a) $(E): z^2 - 2iz - (1+a^2) = 0 \quad a \in \mathbb{C}$

$\Delta = (2i)^2 + 4(1+a^2) = -4 + 4 + 4a^2 = (2a)^2$ donc $\delta = 2a$

$z_1 = \dfrac{2i-2a}{2} = i - a \qquad z_2 = \dfrac{2i+2a}{2} = i + a \qquad S_{\mathbb{C}} = \{i-a\,;\,i+a\}$

b) On pose $a = x + iy$ où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

$|z_1| = |z_2| \Leftrightarrow |i-a| = |i+a| \Leftrightarrow |i - x - iy| = |i + x + iy|$

$\Leftrightarrow |-x + i(1-y)| = |x + i(1+y)| \Leftrightarrow \sqrt{x^2+(1-y)^2} = \sqrt{x^2+(1+y)^2}$

$\Leftrightarrow x^2 + (1-y)^2 = x^2 + (1+y)^2 \Leftrightarrow 1 - 2y + y^2 = 1 + 2y + y^2 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}$

2) a) $\dfrac{z_M + z_N}{2} = \dfrac{i+a+i-a}{2} = i = z_I \Leftrightarrow I = M * N$

$\Leftrightarrow M\ et\ N$ sont symétriques par rapport au point I

b) $M \notin (AB)$; $z_{\overrightarrow{AM}} = z_M - z_A = i + a - 1$

$z_{\overrightarrow{NB}} = z_B - z_N = -1 + 2i - i + a = i + a - 1$

On a alors $z_{\overrightarrow{AM}} = z_{\overrightarrow{NB}} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NB} \Leftrightarrow AMBN$ est un parallélogramme

3) $a = e^{i\theta} + 1 - i \quad \theta \in [0\ ,\ 2\pi[$

a) $MA = |z_A - z_M| = |1 - i - a| = \left|1 - i - e^{i\theta} - 1 + i\right| = \left|-e^{i\theta}\right| = |-1| = 1$

alors lorsque θ varie, le point M varie sur le cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon 1

b) $NA = |z_A - z_N| = |-1 + 2i - i + a| = \left|-1 + 2i - i + e^{i\theta} + 1 - i\right| = \left|e^{i\theta}\right| = 1$

alors lorsque θ varie, le point N varie sur le cercle de centre A et de rayon 1

Exercice 2

1) $(E_1): z^2 + (1+3i)z - 4 = 0$

a) On a $(1-i)^2 + (1+3i)(1-i) - 4 = -2i + 1 - i + 3i + 3 - 4 = 0$

alors $1 - i$ est une solution de (E_1) et $z' = 1 - i$

b) $z' + z'' = \dfrac{-b}{a} = -1 - 3i \quad donc\ z'' = -1 - 3i - 1 + i = -2 - 2i$

2) $(E_2): z^3+(1+i)z^2+(2-2i)z+8i=0$

a) Soit $z_0=\alpha i$ ($\alpha\in\mathbb{R}$) une solution imaginaire pure de l'équation (E_2)

$(\alpha i)^3+(1+i)(\alpha i)^2+(2-2i)\alpha i+8i=0$

$\Leftrightarrow -i\alpha^3-\alpha^2(1+i)+2\alpha i+2\alpha+8i=0$

$\Leftrightarrow -i\alpha^3-\alpha^2-i\alpha^2+2\alpha i+2\alpha+8i=0$

$\Leftrightarrow -\alpha^2+2\alpha+i(-\alpha^3-\alpha^2+2\alpha+8)=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha^2+2\alpha=0 & (1)\\ -\alpha^3-\alpha^2+2\alpha+8=0 & (2)\end{cases}$$

Les solutions de l'équation (1) sont 0 et 2 or 0 n'est pas une solution de l'équation (2) alors que 2 est une solution de l'équation (2) donc $\alpha=2$ alors $z_0=2i$

b) Déterminons les complexes m, n et p tel que :

$$z^3+(1+i)z^2+(2-2i)z+8i=(z-2i)(mz^2+nz+p)$$
$$=mz^3+nz^2+pz-2imz^2-2inz-2ip$$
$$=mz^3+(n-2im)z^2+(p-2in)z-2ip$$

par identification $\begin{cases} m=1\\ n-2im=1+i\\ p-2in=2-2i\\ -2ip=8i\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1\\ n=1+3i\\ p=-4\\ -2ip=8i\end{cases}$

alors $z^3+(1+i)z^2+(2-2i)z+8i=(z-2i)[z^2+(1+3i)z-4]$

par suite $z^3+(1+i)z^2+(2-2i)z+8i=0 \Leftrightarrow (z-2i)[z^2+(1+3i)z-4]=0$

$\Leftrightarrow z-2i=0$ ou $z^2+(1+3i)z-4=0$

alors $z=2i$ ou $z=1-i$ ou $z=-2-2i$

$S_{\mathbb{C}}=\{2i\ ;\ 1-i\ ;-2-2i\}$

3) a) $\dfrac{b-c}{b-a}=\dfrac{1-i+2+2i}{1-i-2i}=\dfrac{3+i}{1-3i}=\dfrac{(3+i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)}=\dfrac{10i}{10}=i=e^{i\frac{\pi}{2}}$

b) $\dfrac{b-c}{b-a}=e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} arg\left(\dfrac{b-c}{b-a}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]\\ \left|\dfrac{b-c}{b-a}\right|=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} arg\left(\dfrac{z_B-z_C}{z_B-z_A}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]\\ \left|\dfrac{z_B-z_C}{z_B-z_A}\right|=1\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]\\ BC=BA\end{cases}$$

Alors le triangle BAC est rectangle isocèle en B est direct.

Exercice 3

1) **a)** $\forall x \in]0\ ,1[\ -1 \leq \sin\frac{\pi}{x} \leq 1 \ \Rightarrow -\sqrt{x} \leq \sqrt{x}\sin\frac{\pi}{x} \leq \sqrt{x}$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{x-1} \leq \frac{\sqrt{x}\sin\frac{\pi}{x}}{x-1} \leq -\frac{\sqrt{x}}{x-1} \qquad \text{car } \forall x \in]0\ ,1[\ \ x-1<0$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{x-1} \leq f(x) \leq -\frac{\sqrt{x}}{x-1}$$

b) $f(0) = \sqrt{0^2 - 2\times 0} + 0 = 0$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = = \lim_{x\to 0^-} \sqrt{x^2-2x} + x = 0$$

$\forall x \in]0\ ,1[$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\sqrt{x}}{x-1} \leq f(x) \leq -\dfrac{\sqrt{x}}{x-1} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x}}{x-1} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} -\dfrac{\sqrt{x}}{x-1} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$ alors f est continue en 0

c) $$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\, f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}\sqrt{x}\sin\frac{\pi}{x}}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{x}{x-1}}_{1}\ \underbrace{\sin\frac{\pi}{x}}_{0} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-2x} + x = \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-2x}+x\right)\left(\sqrt{x^2-2x}-x\right)}{\sqrt{x^2-2x}-x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2-2x}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x}{|x|\sqrt{1-\frac{2}{x}}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x}{-x\sqrt{1-\frac{2}{x}}-x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x}{x\left(-\sqrt{1-\frac{2}{x}}-1\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2}{-\sqrt{1-\frac{2}{x}}-1} = 1$$

2) $u(x) = \dfrac{\pi(x-1)}{x}$ $\qquad v(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ $\qquad w(x) = \dfrac{\pi}{\sqrt{x}}$

a) $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\} \quad (v\ o\ u)(x) = v(u(x)) = \dfrac{\sin(u(x))}{u(x)} = \dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi(x-1)}{x}\right)}{\dfrac{\pi(x-1)}{x}}$

$$= \frac{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{x}\right)}{\frac{\pi(x-1)}{x}} = \frac{\sin\frac{\pi}{x}}{\frac{\pi(x-1)}{x}} = \frac{x\sin\frac{\pi}{x}}{\pi(x-1)} \qquad \boldsymbol{\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\} \quad w(x) \times (v\ o\ u)(x) = \frac{\pi}{\sqrt{x}} \times \frac{x\sin\frac{\pi}{x}}{\pi(x-1)} = \frac{x\sin\frac{\pi}{x}}{\sqrt{x}(x-1)} = \frac{\sqrt{x}\sin\frac{\pi}{x}}{x-1} = f(x)$$

alors $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\} \quad f(x) = w(x) \times (v\ o\ u)(x)$

$\lim\limits_{x\to1} u(x) = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{\pi(x-1)}{x} = 0 \qquad \lim\limits_{x\to0} v(x) = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ alors $\lim\limits_{x\to1} (v\ o\ u)(x) = 1$

$\lim\limits_{x\to1} w(x) = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{\pi}{\sqrt{x}} = \pi \qquad \lim\limits_{x\to1} w(x) \times (v\ o\ u)(x) = \pi$ par suite $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \pi$

Alors f admet un prolongement par continuité en 1 définie par la fonction

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \in \,]0\,,1[\, \cup \,]1\,,+\infty[\\ h(1) = \pi \end{cases}$$

Exercice 4

1) a) $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)' = \dfrac{2(1+x^2) - 2x \times 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$

alors $f'(x)$ est du signe de $1-x^2$ sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

$f(-1) = -1 \qquad f(1) = 1$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{1+x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{x} = 0 \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{1+x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} = 0$

b) f est continue et strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2}\,,1\right]$ $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{5}$ et $f(1) = 1$ alors

$f\left(\left[\frac{1}{2}\,,1\right]\right) = \left[\frac{4}{5}\,,1\right]$

par suite $\forall x \in \left[\frac{1}{2}\,,1\right]$ $\quad \frac{4}{5} \le f(x) \le 1 \;\Rightarrow \frac{1}{2} \le \frac{4}{5} \le f(x) \le 1 \;\Rightarrow \frac{1}{2} \le f(x) \le 1$

On a $U_0 = \frac{1}{2}$; $\qquad \frac{1}{2} \le U_0 \le 1$ la propriété est vraie pour $n = 0$

soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $\quad \frac{1}{2} \le U_n \le 1$ montrons que $\frac{1}{2} \le U_{n+1} \le 1$

on a $U_{n+1} = f(U_n)$

$\forall x \in \left[\frac{1}{2}\,,1\right]$; $\frac{1}{2} \le f(x) \le 1$ or $\frac{1}{2} \le U_n \le 1$ alors $\frac{1}{2} \le f(U_n) \le 1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2} \le U_{n+1} \le 1$

Conclusion $\;\forall n \in \mathbb{N}\;\; \frac{1}{2} \le U_n \le 1$

c) On a : $U_{n+1} - U_n = \dfrac{2U_n}{1+(U_n)^2} = \dfrac{U_n - (U_n)^2}{1+(U_n)^2} = \dfrac{U_n(1-(U_n)^2)}{1+(U_n)^2}$

$$= \frac{U_n(1+U_n)(1-U_n)}{1+(U_n)^2}$$

Or $\;\frac{1}{2} \le U_n \le 1 \;\Rightarrow\; 0 \le 1 - U_n \le \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; 1 - U_n > 0$ alors $U_{n+1} - U_n > 0$

Donc la suite U est croissante et elle est majorée alors elle est convergente

2) a) $V_{n+1} = 1 - U_{n+1} = 1 - \dfrac{2U_n}{1+(U_n)^2} = \dfrac{1+(U_n)^2 - 2U_n}{1+(U_n)^2} = \dfrac{(1-U_n)^2}{1+(U_n)^2}$

$$= \frac{(V_n)^2}{1+(U_n)^2} = \frac{V_n}{1+(U_n)^2}V_n$$

Or $\;\dfrac{1}{2} \le U_n \le 1 \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{4} \le (U_n)^2 \le 1 \Rightarrow \dfrac{5}{4} \le 1+(U_n)^2 \le 2 \Rightarrow \dfrac{1}{2} \le \dfrac{1}{1+(U_n)^2} \le \dfrac{4}{5}$

$V_n = 1 - U_n \quad$ et $\;\dfrac{1}{2} \le U_n \le 1\;$ alors $\;0 \le V_n \le \dfrac{1}{2}\;$ par suite

$0 \le \dfrac{V_n}{1+(U_n)^2} \le \dfrac{2}{5} \;\Rightarrow\; 0 \le \dfrac{V_n}{1+(U_n)^2}V_n \le \dfrac{2}{5}V_n \;\Rightarrow\; 0 \le V_{n+1} \le \dfrac{2}{5}V_n$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$; $\;0 \le V_{n+1} \le \frac{2}{5}V_n\;$ alors

$0 \le \cancel{V_1} \le \dfrac{2}{5}V_0$

$0 \le \cancel{V_2} \le \frac{2}{5}\cancel{V_1}$

$0 \le V_3 \le \frac{2}{5}\cancel{V_2}$

•

•

.

$0 \leq \cancel{V_{n-1}} \leq \cancel{V_{n-2}}$

$0 \leq V_n \leq \frac{2}{5}\cancel{V_{n-1}}$

On multipliant les n inégalités membre à membre :

$0 \leq V_n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n V_0$ alors $0 \leq V_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$

c) On a $\forall n \in \mathbb{N}$; $0 \leq V_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ alors

$0 \leq V_0 \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^0$

$0 \leq V_1 \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^1$

$0 \leq V_2 \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2$

.

.

.

$0 \leq V_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$

On additionnant les n inégalités membre à membre :

$0 \leq V_0 + V_1 + V_2 \dots V_n \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2 \dots + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n \quad \Rightarrow$

$0 \leq \sum_{k=0}^{n} V_k \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 \dots + \left(\frac{2}{5}\right)^n\right)$

Soit la suite W définie sur $\mathbb{N}$ par $W_n = 1 + \frac{2}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 \dots + \left(\frac{2}{5}\right)^n$

On remarque bien que la suite W est la somme des n premiers termes d'une suite

géométrique de 1[er] terme 1 et de raison $q = \frac{2}{5}$ alors

$W_n = \frac{1 \times \left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right]}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{5}{3}\left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right]$ alors $\frac{1}{2}W_n = \frac{5}{6}\left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right]$ par suite

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n} V_k \leq \frac{5}{6}\left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right] \qquad \text{alors} \qquad 0 \leq S_n \leq \frac{5}{6}\left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right]$$

d) On a : $0 \leq S_n \leq \frac{5}{6}\left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right]$ alors $0 \leq \frac{S_n}{n} \leq \frac{\frac{5}{6}\left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right]}{n}$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n = 0 \quad \text{alors} \lim_{n\to+\infty}\frac{5}{6}\left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right] = \frac{5}{6} \quad \text{donc} \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{5}{6}\left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right]}{n} = 0$$

$$\begin{cases} 0 \leq \frac{S_n}{n} \leq \frac{\frac{5}{6}\left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right]}{n} \\ \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\frac{5}{6}\left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right]}{n} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n} = 0$$