

Correction devoir de contrôle n°1

(2025/26) 3ème Tech1

Exercice 1 :

$$1^\circ \forall x \in \mathbb{R}; f(x) = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$a) f(0) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 2 \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} \times 0$$

$$= \sqrt{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 2 \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \sqrt{2} \cos(\pi)$$

$$= 2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \sqrt{2} \times (-1)$$

$$= -\sqrt{2} + \sqrt{2}$$

$$= 0$$

$$b) f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 2 \cos\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2} \cos\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 2 \cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) - \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= 2 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) - \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 2 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) - \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$2^\circ a) \forall x \in \mathbb{R};$$

$$f(x) = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 2 \left(\cos x \cdot \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}(-\sin x)$$

$$= \sqrt{2} \cos x - \sqrt{2} \sin x + \sqrt{2} \sin x$$

$$= \sqrt{2} \cos x$$

$$b) f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2} \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$d'autre part f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) - \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{donc } 2 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) - \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$c) \cos \frac{11\pi}{12} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\sin \frac{7\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Exercice 2 :

$$1^\circ a) D_f = \mathbb{R}^*$$

b) La courbe $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport l'origine du repère donc f est paire.

c) f est croissante sur $]0; 3]$

f est décroissante sur $]3; 4]$

f est croissante sur $[4; +\infty[$

$$2^\circ a) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty ;$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 0; \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

b) on a $\Delta_1 : y = x - 5$ est une asymptote oblique à

$$\mathcal{C}_f \text{ au } v(+\infty) \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x + 5 = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = -5$$

II. 1°/ a- g définie par $g(x) = x \cdot f(x)$

$$\text{donc } D_g = D_f = \mathbb{R}^*$$

$$b) \forall x \in \mathbb{R}^*; -x \in \mathbb{R}^* \text{ et}$$

$$g(-x) = -x \cdot f(-x)$$

$$= -x \cdot (-f(x)) \text{ car } f \text{ est impaire}$$

$$= x \cdot f(x)$$

$$= g(x) \text{ donc la fonction } g \text{ est paire}$$

$$2^\circ a) \lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} x \cdot f(x) = 3 \times 0 = 0$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} x f(x) = 3 \times \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$$

donc $\mathcal{C}_g$ admet une asymptote verticale à droite en 3.

(la droite d'équation $x = 3$)

$$c) \lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) \text{ donc } g \text{ n'admet pas de}$$

limite en 3.

$$3^\circ a) \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot f(x) = +\infty \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$b) \text{ on a ; } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = +\infty \text{ alors}$$

$\mathcal{C}_g$ admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées.

Exercice 3 :

1°/ $D_f = D_1 \cup D_2$ tel que :

$$D_1 = \{ \forall x < -1, \text{ tel que } x + 1 \neq 0 \text{ et } 1 - x \geq 0 \}$$

$$= \{ \forall x < -1, \text{ tel que } x \neq -1 \text{ et } 1 \geq x \}$$

$$=]-\infty; -1[$$

$$D_2 = \{ \forall x > -1, \text{ tel que } x^2 + x \neq 0 \}$$

$$\text{Or } x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -1$$

$$\text{donc } D_2 =]-1; 0[\cup]0; +\infty[\text{ Par suite}$$

$$D_f =]-\infty; -1[\cup]-1; 0[\cup]0; +\infty[= \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$$

$$2^\circ a) \forall x \in]-\infty; -1[; \text{ on a :}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{2}}{x+1}$$

$$= \frac{(\sqrt{1-x} - \sqrt{2})(\sqrt{1-x} + \sqrt{2})}{(x+1)(\sqrt{1-x} + \sqrt{2})}$$

$$= \frac{(\sqrt{1-x})^2 - (\sqrt{2})^2}{(x+1)(\sqrt{1-x} + \sqrt{2})}$$

$$= \frac{-(x+1)}{(x+1)(\sqrt{1-x} + \sqrt{2})}$$

$$= \frac{-1}{(\sqrt{1-x} + \sqrt{2})}$$

b) Soit $a \in]-\infty; -1[$ et $b \in]-\infty; -1[$ telque $a < b$
on a : $a < b < -1 \Leftrightarrow -a > -b > 1$

$$\Leftrightarrow 1 - a > 1 - b > 2$$

$$\text{Donc } \sqrt{1-a} < \sqrt{1-b}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-a} + \sqrt{2} < \sqrt{1-b} + \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1-a} + \sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{1-b} + \sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{\sqrt{1-a} + \sqrt{2}} < \frac{-1}{\sqrt{1-b} + \sqrt{2}} \Leftrightarrow f(a) < f(b) \text{ et } f \text{ une}$$

fonction croissante sur $]-\infty; -1[$

$$3^\circ/a) \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{-1}{(\sqrt{1-x} + \sqrt{2})} = \frac{-1}{(\sqrt{2} + \sqrt{2})} = \frac{-1}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x^3+1}{x^2+x} \xrightarrow{\text{(FI)}} \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x(x+1)} = \frac{3}{-1} = -3$$

b) Puisque $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$; f n'admet pas de limite en (-1)

$$4^\circ/a) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2-x+1}{x} = +\infty$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2-x+1}{x} = -\infty$$

b) l'axe des ordonnées est une asymptote à $\mathcal{C}_f$

$$5^\circ/a) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{(\sqrt{1-x} + \sqrt{2})} \xrightarrow{+\infty} 0$$

Donc l'axe des abscisses est une asymptote à $\mathcal{C}_f$ au $v(-\infty)$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+1}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

6^\circ/a) $\forall x \in]0; +\infty[$ on a :

$$x - 1 + \frac{1}{x} = \frac{x(x-1)+1}{x} = \frac{x^2-x+1}{x} = f(x)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x-1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0. \text{ donc la droite}$$

$\Delta: y = x - 1$ est une asymptote à $\mathcal{C}_f$ au $v(+\infty)$

Exercice 4 :

1^\circ/ Les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont isométriques tangentes en I donc $I = O * O' \Leftrightarrow \overrightarrow{O'I} = -\overrightarrow{OI}$

$$d'où \widehat{(OI, O'I)} = \pi + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

$$2^\circ/a) \text{ On a: } \widehat{(OI, OM)} = \frac{2\pi}{7} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Et } \frac{2\pi}{7} - \left(-\frac{152\pi}{7}\right) = \frac{154\pi}{7} = 22\pi = 11 \times 2\pi$$

Donc $\left(-\frac{152\pi}{7}\right)$ est une mesure de $\widehat{(OI, OM)}$

$$b) \widehat{(O'I, O'M')} = \frac{25\pi}{14} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

$$= \frac{28\pi}{14} - \frac{3\pi}{14} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

$$= 2\pi - \frac{3\pi}{14} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

Puis que $-\frac{3\pi}{14} \in]-\pi; \pi]$ alors $-\frac{3\pi}{14}$ est la mesure principale de $\widehat{(O'I, O'M')}$

$$c) \widehat{(OM, O'M')} = \widehat{(OM, OI)} + \widehat{(OI, O'M')} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

$$= \widehat{(OM, OI)} + \widehat{(O'I, O'M')} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

$$= \widehat{(OM, OI)} + \widehat{(O'I, O'M')} + \pi + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

$$= \frac{-2\pi}{7} + \frac{-3\pi}{14} + \pi + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

$$= \frac{\pi}{2} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

Donc $(OM) \perp (O'M')$

$$3^\circ/ \widehat{(ON, O'M')} = \widehat{(OM, OI)} + \widehat{(OI, O'M')} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

$$= \widehat{(ON, OI)} + \widehat{(O'I, O'M')} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

$$= \widehat{(ON, OI)} + \widehat{(O'I, O'M')} + \pi + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

$$= \frac{3\pi}{14} + \frac{-3\pi}{14} + \pi + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

$$= \pi + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

Donc $(ON) // (O'M')$

Prof :