

Correction devoir de contrôle n°1

(2024/25) 3^{ème} Sc1

Exercice 1 :

1°/a- On a : $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BO}) \equiv \frac{91\pi}{10} [2\pi]$

et $\frac{91\pi}{10} - \frac{11\pi}{10} = \frac{80\pi}{10} = 4 \times 2\pi$ donc $\frac{11\pi}{10}$ est une mesure de $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BO})$

b- On a : $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BO}) \equiv \frac{11\pi}{10} [2\pi]$
 $\equiv \frac{11\pi}{10} - 2\pi [2\pi]$
 $\equiv -\frac{9\pi}{10} [2\pi]$

Puisque $-\frac{9\pi}{10} \in]-\pi; \pi]$ alors $-\frac{9\pi}{10}$ est la mesure principale $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BO})$

2°/a) : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}) \equiv (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}) + \pi [2\pi]$
 $\equiv (\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BD}) + \pi [2\pi]$ car $\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{BO}$
 $\equiv \frac{9\pi}{10} + \pi - 2\pi [2\pi]$
 $\equiv -\frac{\pi}{10} [2\pi]$

b) $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) \equiv (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}) [2\pi]$
 $\equiv \frac{-2\pi}{5} + \frac{-\pi}{10} [2\pi]$
 $\equiv \frac{-4\pi - \pi}{10} [2\pi]$
 $\equiv \frac{-5\pi}{10} [2\pi]$
 $\equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$

c) On a : $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) \equiv \frac{-\pi}{2} [2\pi]$ donc $(AC) \perp (BD)$ or $[AB]$ est un diamètre de $\mathcal{C}$ et $C \in \mathcal{C}$ donc $(AC) \perp (BC)$ par suite $(BC) // (BD)$ et B, C et D sont alignées c à d : $C \in (BD)$.

Exercice 2 :

1.1°/a) 4 est un maximum absolu de f en -1

2 est un maximum relatif de f en 4

-4 est un minimum absolu de f en 1

-2 est un minimum relatif de f en -4

b) f est croissante sur $[0; 1]$ et sur $[4; 5]$

f est décroissante sur $[1; 4]$

2°/a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 3$.

b) on a $f(0) = -3 \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ donc la fonction f n'est pas continue en 0

c- f est continue sur $[-5; 0[$ et sur $[0; 5]$

3°/ $f([-5; 0]) = [-2; 4]$

$f([-5; 0]) = f([-5; 0]) \cup f(\{0\}) = [-2; 4] \cup \{-3\}$

$f([-2; 2]) = f([-2; 0]) \cup f([0; 2])$

$= [3; 4] \cup [-4; -3]$

4°/a) Sur $[-5; 0[\cup]0; 5]$ la courbe est symétrique par rapport l'origine du repère O donc la restriction de f sur $[-5; 0[\cup]0; 5]$ est impaire.

b) Puis que la restriction de f sur $[-5; 0[\cup]0; 5]$ est impaire, alors $\forall x \in [-5; 0[\cup]0; 5]$ on a :

$$f(-x) = -f(x)$$

II.1°/ $g(0) = 0 \times f(0) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x f(x) = 0$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x f(x) = 0$$

on a $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0)$ donc g est continue en 0.

2°/ On a : $x \mapsto f(x)$ est continue sur $[-5; 0[\cup]0; 5]$ et $x \mapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc g (comme étant produit) est continue sur $[-5; 0[\cup]0; 5]$ est puis que g est continue en 0 alors g est continue sur $[-5; 5]$.

3°/ $\forall x \in [-5; 5] \setminus \{0\}$ on $(-x) \in [-5; 5] \setminus \{0\}$ et

$$g(-x) = -x \cdot f(-x) = -x \cdot (-f(x)) = x f(x) = g(x)$$

Or $g(0) = 0$ donc $\forall x \in [-5; 5]; (-x) \in [-5; 5]$ et

$g(-x) = g(x)$ c-à-d la fonction g est paire

Exercice 3 :

1°/a) On a : $x \mapsto x^2 - 2x + 2$ est une fonction polynôme continue sur $\mathbb{R}$ et $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 2 = -4 < 0$ donc

$\forall x \in \mathbb{R}; x^2 - 2x + 2 > 0$ par suite la fonction

$x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x + 2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et la fonction

$x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x + 2} - 1$ est continue sur $\mathbb{R}$

Et on a $x \mapsto \frac{1}{(x-1)^2}$ une fonction rationnelle continue sur son domaine $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

D'où f comme étant produit est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

b) $\forall x \in D_f; f(x) = \frac{(\sqrt{x^2 - 2x + 2} - 1)(\sqrt{x^2 - 2x + 2} + 1)}{(x-1)^2(\sqrt{x^2 - 2x + 2} + 1)}$
 $= \frac{x^2 - 2x + 2 - 1}{(x^2 - 2x + 1)(\sqrt{x^2 - 2x + 2} + 1)}$

$$= \frac{1}{(\sqrt{x^2 - 2x + 2} + 1)}$$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(\sqrt{x^2 - 2x + 2} + 1)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

donc f est prolongeable par continuité en 1. Soit F le prolongé de f en 1, F est définie sur par

$$F(x) = \frac{1}{(\sqrt{x^2 - 2x + 2} + 1)}$$

2°/a) On a : $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{1}{2}$ et

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x - \frac{1}{|x| + 1} = 1 - \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Et $g(1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Puis que : $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = g(1)$ alors g est continue en 1.

b) On a f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ en particulier continue sur $]1; +\infty[$ donc g est continue sur $]1; +\infty[$
 $x \mapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}$

Donc la fonction $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$

Par suite $x \mapsto |x| + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}; |x| + 1 \neq 0$ car $|x| + 1 \geq 1$ alors $x \mapsto \frac{-1}{|x|+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ est puis que $x \mapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}$ alors $x \mapsto x - \frac{1}{|x|+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier continue sur $] -\infty; 1]$ c.-à-d. : g est continue sur $] -\infty; 1]$

Conclusion :

On a : g est continue sur $] -\infty; 1]$, g est continue sur $]1; +\infty[$ et g est continue en 1.

Donc g est continue sur $\mathbb{R}$

3°/a) On a : $g(0) = 0 - \frac{1}{1+1} = -\frac{1}{2} < 0$ et $g(1) = \frac{1}{2} > 0$ puis que g est continue sur $\mathbb{R}$ alors l'équation $g(x) = 0$ admet au moins une solution $\alpha \in [0; 1]$

b) On a : $\alpha \in [0; 1]$ donc $g(\alpha) = \alpha - \frac{1}{|\alpha|+1}$ or $\alpha \geq 0$

$$\text{donc } g(\alpha) = \alpha - \frac{1}{\alpha+1}$$

$$g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha - \frac{1}{\alpha+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{\alpha+1}$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha = 1$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha - 1 = 0$$

Donc α est une solution de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$

$$\text{c) } \Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0$$

$$\text{donc } x' = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \notin [0; 1] \text{ et } x'' = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \in [0; 1]$$

$$\text{c.-à-d. } \alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Exercice 4 :

1°/a) On a ABC est un triangle rectangle en B donc B le projeté orthogonale de C sur (AB) d'où :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB^2 = 4^2 = 16$$

b) On a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC}$ tel que $AB = 4$ et

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 16 + 4 = 20 \Leftrightarrow AC = 2\sqrt{5}$$

d'autre part $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 16$ donc $4 \times 2\sqrt{5} \cos \widehat{BAC} = 16$

$$\Leftrightarrow \cos \widehat{BAC} = \frac{16}{8\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

2°/a) $\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{IB} = -IB^2 = -2^2 = -4$ car B le projeté orthogonale de C sur (IB)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{BE} &= \overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{CB} \text{ car } \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BE} \text{ puis que } B = C * E \\ &= CB^2 \text{ car } B \text{ le projeté de } I \text{ sur } (BC) \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) On a : } \overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{IE} &= \overrightarrow{CI} \cdot (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BE}) \\ &= \overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{BE} \\ &= -4 + 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $(CI) \perp (IE)$

3°/ $\mathcal{E} = \{\forall M \in \mathcal{P}, \text{ tel que } MA^2 - 3MB^2 = 8\}$: avec $\mathcal{P}$ est le plan

$$\begin{aligned} \text{a) } CA^2 - 3CB^2 &= (2\sqrt{5})^2 - 3 \times 2^2 \\ &= 20 - 3 \times 4 \\ &= 8 \text{ donc } C \in \mathcal{E} \end{aligned}$$

b) G est le barycentre de $(A; 1)$ et $(B; -3)$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

$\forall M \in \mathcal{P}$, on a:

$$\begin{aligned} MA^2 - 3MB^2 &= (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 - 3(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 \\ &= MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GA} + GA^2 - 3MG^2 - 6\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GB} - 3GB^2 \\ &= -2MG^2 + GA^2 - 3GB^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot (\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB}) \\ &= -2MG^2 + GA^2 - 3GB^2 = \vec{0} \end{aligned}$$

D'autre part G est le barycentre de $(A; 1)$ et $(B; -3)$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{-3}{2} \overrightarrow{AB} \text{ donc } AG = \frac{3}{2} AB = \frac{3}{2} \times 4 = 6$$

$$\text{Et } \overrightarrow{BG} = \frac{1}{-2} \overrightarrow{BA} \text{ donc } BG = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } MA^2 - 3MB^2 &= -2MG^2 + 36 - 3 \times 4 \\ &= 24 - 2MG^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \mathcal{E} &= \{\forall M \in \mathcal{P}, \text{ tel que } MA^2 - 3MB^2 = 8\} \\ &= \{\forall M \in \mathcal{P}, \text{ tel que } 24 - 2MG^2 = 8\} \\ &= \{\forall M \in \mathcal{P}, \text{ tel que } 2MG^2 = 24 - 8 = 16\} \\ &= \{\forall M \in \mathcal{P}, \text{ tel que } MG^2 = \frac{16}{2} = 8\} \\ &= \{\forall M \in \mathcal{P}, \text{ tel que } MG^2 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}\} \end{aligned}$$

$\mathcal{E}$ est le cercle de centre G et de rayon $2\sqrt{2}$

Or $C \in \mathcal{E}$ donc le cercle $\mathcal{E}$ de centre G passant par C .