

Correction devoir de contrôle n°1 (2024/25) 3^{ème} Sc1

Exercice 1 :

1°/a) On a $\widehat{(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})} \equiv -\frac{7\pi}{10}[2\pi]$ et puisque $\frac{93\pi}{10} - \left(-\frac{7\pi}{10}\right) = \frac{100\pi}{10} = 10\pi = 5 \times 2\pi$ alors $\frac{93\pi}{10}$ est une mesure de $\frac{93\pi}{10}$

$$\begin{aligned} \text{b) } \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})} &\equiv -\frac{99\pi}{5}[2\pi] \\ &\equiv \frac{\pi}{5} - \frac{100\pi}{5}[2\pi] \\ &\equiv \frac{\pi}{5} - 20\pi[2\pi] \\ &\equiv \frac{\pi}{5}[2\pi] \end{aligned}$$

$\frac{\pi}{5} \in]-\pi; \pi]$ alors $\frac{\pi}{5}$ est la mesure principale de l'angle orientés $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})}$

$$\begin{aligned} 2^\circ/\text{a) } \widehat{(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})} &\equiv \widehat{(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD})} + \widehat{(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{BC})}[2\pi] \\ &\equiv 0 + \widehat{(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB})} + \pi[2\pi] \\ &\equiv \pi - \widehat{(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})}[2\pi] \\ &\equiv \pi - \left(-\frac{7\pi}{10}\right) - 2\pi[2\pi] \\ &\equiv -\frac{3\pi}{10}[2\pi] \end{aligned}$$

$\widehat{(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD})} \equiv 0[2\pi]$ puisque $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaire de même sens

$$\begin{aligned} \text{b) } \widehat{(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC})} &\equiv \widehat{(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BA})} + \widehat{(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})}[2\pi] \\ &\equiv \widehat{(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})} + \pi - \frac{3\pi}{10}[2\pi] \\ &\equiv -\frac{\pi}{5} + \pi - \frac{3\pi}{10}[2\pi] \\ &\equiv \frac{5\pi}{10}[2\pi] \\ &\equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{BC}$ et $(AD) \perp (BC)$.

$$\begin{aligned} 3^\circ/\text{a) } \widehat{(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CE})} &\equiv \widehat{(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})} + \widehat{(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CE})}[2\pi] \\ &\equiv -\frac{7\pi}{10} - \frac{3\pi}{10}[2\pi] \\ &\equiv -\pi[2\pi] \end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont colinéaires et les points C, B et E sont alignés

b) On a $(AD) \cap (BC) = \{E\}$ et $(AD) \perp (BC)$ donc ABE est un triangle rectangle en E.

Exercice 2 :

1°/a) Le point $(-2; 3) \in \mathcal{C}_f$ donc $f(-2) = 3$ et f est définie en (-2) .

b) Il n'existe pas un point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 2 donc f n'est pas définie en 2.

$$c/D_f = [-5; 2[\cup]2; 5]$$

2°/a) 4 est un maximum de f en (-3) et (-4) est un minimum de f en 3.

b) f est croissante sur $[-5; -3]$, décroissante sur $[-3; -2]$.

3°/a) f n'est pas continue en (-2) puisque f n'est pas continue à droite en (-2) .

b) f n'est pas définie en 2 d'où f n'est pas continue en 2.

c) D'après la figure $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = -3$ et $f(4) = 3$ car $A \in \mathcal{C}_f$ et comme $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) \neq f(4)$ alors f n'est pas continue en 4.

$$4^\circ/f([-5; -2]) = [0; 4].$$

$$\begin{aligned} f([-2; 2[) &= \{f(-2)\} \cup f(]-2; 2[) \\ &= \{3\} \cup]-3; 3] =]-3; 3] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(]2; 5[) &= f(]2; 4[) \cup \{f(4)\} \cup f(]4; 5[) \\ &= [-4; -3[\cup \{3\} \cup]-3; 0[\end{aligned}$$

5°/a) $\forall x \in [-5; 5] \setminus \{2\}; g(x) = |f(x)|$ donc $\lim_{x \rightarrow 4} g(x) = \lim_{x \rightarrow 4} |f(x)| = -\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 3$ car $f(x) < 0$ si $x \neq 4$ et $x \in v(x)$.

b) $g(4) = |f(4)| = 3 = \lim_{x \rightarrow 4} g(x)$ donc la fonction g est continue en 4.

Exercice 3 :

1°/a) on a : $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

Et $x + 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3$

$$x^2 + 2x + 6 \geq 0.$$

$$\text{On a : } \Delta = 2^2 - 4 \times 6 = -20 < 0$$

d'où $\forall x \in \mathbb{R}; x^2 + 2x + 6 > 0$

$$\text{et } D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3; 1\}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \forall x \in D_f; f(x) &= \frac{(\sqrt{x^2+2x+6}-3)(\sqrt{x^2+2x+6}+3)}{(x-1)(x+3)(\sqrt{x^2+2x+6}+3)} \\ &= \frac{x^2+2x+6-9}{(x^2+2x-3)(\sqrt{x^2+2x+6}+3)} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{(x+1)^2+5}+3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } f(-1) &= \frac{1}{\sqrt{5}+3} \text{ et } \forall x \in D_f; \text{ on a} \\ (x+1)^2 &\geq 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + 5 \geq 5 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + 5} \geq \sqrt{5} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + 5} + 3 \geq \sqrt{5} + 3 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+5}+3} \leq \frac{1}{\sqrt{5}+3} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow f(x) \leq f(-1)$$

Donc $f(-1)$ est un minimum absolu de f

2°/a)

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+5}+3} = \frac{1}{6}$$

$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = g(1)$ donc g est continue en 1.

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow -3} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -3} f(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+5}+3} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Donc g est prolongeable par continuité et sa fonction prolongée G définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} G(x) = g(x) & \text{si } x \neq -3 \\ G(-3) = \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\text{ou bien } G(x) = \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+5}+3}$$

c) $\forall x \in D_f; g(x) = f(x)$. On a :

$x \mapsto (x+1)^2 + 5$ fonction polynôme

continue positive sur $\mathbb{R}$, donc

$x \mapsto \sqrt{(x+1)^2 + 5}$ fonction continue sur $\mathbb{R}$

Et $x \mapsto \sqrt{(x+1)^2 + 5} - 3$ continue sur $\mathbb{R}$ et

$x \mapsto \frac{1}{(x-1)(x+3)}$ est fonction rationnelle

continue sur son domaine $\mathbb{R} \setminus \{-3; 1\}$

Donc la fonction produit f est continue sur D_f

or g est continue en 1 donc g est continue sur $] -3; +\infty[$

3°/ h définie sur $\mathbb{R}^+$ par $h(x) = \frac{1}{g(x)} - 4x$

a) g est continue sur $] -3; +\infty[$ en particulier sur $\mathbb{R}^+$ tel que $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$

donc $\frac{1}{g}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et comme la fonction

linéaire $x \mapsto -4x$ est continue sur $\mathbb{R}$ en

particulier sur $\mathbb{R}^+$ alors h est continue sur $\mathbb{R}^+$

b) On a h est continue sur $\mathbb{R}^+$,

$$h(1) = 6 - 4 = 2 > 0,$$

$$h(2) = \sqrt{14} + 3 - 8 = \sqrt{14} - 5 < 0$$

Donc l'équation $h(x) = 0$ admet au moins une solution $\alpha \in [1; 2]$

Exercice 4 :

1°/a) Le point H est le projeté orthogonale de D sur (AB) donc

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} = AH \cdot AB = 1 \times 4 = 4$$

$$\text{b) } \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = AD \cdot AB \cdot \cos \widehat{BAD}$$

$$= 2 \times 4 \cos \widehat{BAD} = 4$$

$$\Leftrightarrow \cos \widehat{BAD} = \frac{1}{2} \text{ et } \widehat{BAD} = \frac{\pi}{3}$$

$$2^\circ/\text{a) } BD^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD})^2$$

$$= AB^2 + AD^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD}$$

$$= AB^2 + AD^2 - 2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$\text{b) on a: } BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$= 4^2 + 2^2 - 2 \times 4$$

$$= 12$$

$$\text{D'où } BD = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$3^\circ/\mathcal{C} = \{\forall M \in \mathcal{P}, \text{tel que } 3MA^2 + MB^2 = 24\}$$

$$\text{a/ Puisque } 3DA^2 + DB^2 = 3 \times 4 + 12 = 24$$

alors $D \in \mathcal{C}$

b/ $H \in [AB]$ tel que $AH = 1$ et $AB = 4$

$$\text{Donc } \overrightarrow{AH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3+1}\overrightarrow{AB}$$

$\Leftrightarrow H$ le barycentre de $(A; 3)$ et $(B; 1)$.

c) $\forall M \in \mathcal{P}$; on a :

$$3MA^2 + MB^2$$

$$= 3(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA})^2 + (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HB})^2$$

$$= 3(MH^2 + HA^2 + 2\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{HA}) + HB^2 +$$

$$2\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{HB}$$

$$= 4MH^2 + 3HA^2 + HB^2 + 6\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{HA} +$$

$$2\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{HB}$$

$$= 4MH^2 + 3 \cdot 1^2 + 3^2 + 2\overrightarrow{MH} \cdot (\underbrace{3\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB}}_{\vec{0}})$$

$$= 4MH^2 + 12$$

car H le barycentre de $(A; 3)$ et $(B; 1)$

$$\text{d) } \mathcal{C} = \{\forall M \in \mathcal{P}, \text{tel que } 3MA^2 + MB^2 = 24\}$$

$$= \{\forall M \in \mathcal{P}, \text{tel que } 4MH^2 + 12 = 24\}$$

$$= \{\forall M \in \mathcal{P}, \text{tel que } MH^2 = 3\}$$

$$= \{\forall M \in \mathcal{P}, \text{tel que } MH = \sqrt{3}\}$$

Donc $\mathcal{C}$ est le cercle de centre H de rayon $\sqrt{3}$

($\mathcal{C}$ est le cercle de centre H passant par D car $D \in \mathcal{C}$)