Lycée Dar Chaabene	Correction devoir de synthèse n°2	$4^{ème}$ Math

Exercice 1 :

1) $z' = 2i\bar{z} - 1 - i$

a) $k = |2i| = 2$ Vrai

b) $z_\Omega = \frac{a\bar{b}+b}{1-|a|^2} = \frac{2i(-1+i)-1-i}{-3} = \frac{-3i-3}{-3} = 1+i$

Faux Remarque $\frac{b}{1-a} = \frac{-1-i}{1-2i} = \frac{(-1-i)(1+2i)}{5} = \frac{1}{5} - \frac{3}{5}i$

c) $\Delta : y = x \quad \Omega \in \Delta$

soit $A(-1, -1) \in \Delta$, $f(A) = A' \Leftrightarrow z_{A'} = 2(-1+i) - 1 - i = -zi - 3 \Leftrightarrow A'(-3, -3) \in \Delta$ Vrai

Equation : $\overrightarrow{\Omega M'} = 2\overrightarrow{\Omega M} \Leftrightarrow z - 1 - i = 2(z - 1 - i) \Leftrightarrow$

$2i\bar{z} - 1 - i - 1 - i = 2z - 2i - 2i \Leftrightarrow 2z - 2 - 2i$

$\Leftrightarrow 2i\bar{z} - \cancel{2} - \cancel{2i} = 2z - \cancel{2} - \cancel{2i} \Leftrightarrow \bar{z} = -iz \Leftrightarrow x - iy = -ix + y \Leftrightarrow y = x$

2) a) $2012 = 190 \times 10 + 112 \Rightarrow -2012 = 190 \times (-11) + 78 \Rightarrow -2012 = (-190) \times 11 + 78$

$\Rightarrow q = 11$ Faux

b) $p \wedge (2p + 1) = 1$ car $2p + 1 - 2p = 1$ Faux

c) $\left.\begin{matrix} 31 \text{ premier} \\ 31 \wedge 5 = 1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow 31 / 5^{30} - 1 \Rightarrow 5^{30} \equiv 1[31] \Rightarrow 5^{30n} \equiv 1[31]$ Vrai

Exercice 2 :

1) S : similitude directe / $S(J) = B$ / $S(D) = K$

a) $(\widehat{\overrightarrow{JD},\overrightarrow{BK}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BA}})(2\pi) \equiv (\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}})(2\pi) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi)$

$k = \frac{BK}{JD} = \frac{2BA}{½BC} = 4 \times \cos\frac{\pi}{3} = 2$

b) $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AK} \Rightarrow J = C * K$

CBK équilatéral et $(CA) \perp (BK)$

$\Rightarrow (\widehat{\overrightarrow{CJ},\overrightarrow{CB}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{CK},\overrightarrow{CB}})(2\pi) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi)$ et $\frac{CB}{OJ} = \frac{OB}{½CB} = 2 \Leftrightarrow S(C) = C$

2) f antidéplacement / $f(0) = A$ / $f(A) = A'$

a) $fof(O) = A' \neq D \Rightarrow f$ est une symétrique glissante

$\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA'} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$

$\Delta' = (JI)$.

b) $f(K) = S_{(JI)}$ o $t_{\overrightarrow{AB}}(K) = S_{(JI)}(A) = C$

3) $g = fos$

a) g = sim ind de rapport $k = 2 \times 1 = 2$

http://mathematiques.kooli.me/

b) $gog(D) = ?$

$g(D) = fos(D) = f(K) = C$

$g(C) = fos(C) = f(C) = B \quad \Rightarrow \quad gog(D) = B$

c) $h_{(\Omega, 4)}(D) = B \Rightarrow \overrightarrow{\Omega B} - 4\overrightarrow{\Omega D} = \vec{0} \Leftrightarrow \Omega$ by(B,1) et (D,-4)

$\overrightarrow{B\Omega} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BD}$

d) Δ = biss int de $(\widehat{\overrightarrow{\Omega D},\overrightarrow{\Omega C}})$

Exercice 3 :

(E) : $7x - 4y = 13$

1) a) $7 \times 3 - 4 \times 2 = 21 - 8 = 13$

b) $S_{Z^2} = \{(3 + 4k ;\ 2 + 7k) ;\ k \in Z\}$

2) $a = 4n + 3$; $b = 7n + 2$

a) Si d/a et $d/b \Rightarrow d/7a - 4b \Rightarrow d/21 - 8 \Rightarrow d/13$

b) $a \wedge b = 13 \Rightarrow 13|a$ et $13|b \Rightarrow 13/2a - b \Rightarrow 13/n + 4 \Rightarrow n + 4 \equiv 0[13] \Rightarrow n \equiv 9[13]$

Inversement

Si $n \equiv 9[13] \Rightarrow 4n + 3 \equiv 0\ [13]$ et $7n + 2 \equiv 0\ [13]$

$\Rightarrow 13/a$ et $13/b \Rightarrow 13/a \wedge b$ or $a \wedge b/13 \Rightarrow a \wedge b = 13$

3) a) $10^1 \equiv 10[13]$; $10^2 \equiv 9[13]$; $10^3 \equiv 12[13]$; $10^4 \equiv [13]$; $10^5 \equiv 4[13]$; $10^6 \equiv 1[13]$

b) $n = 2012^{2012}$; $2012 \equiv 10[13] \Rightarrow 2012^{2012} \equiv 10^2[13] \equiv 9[13] \Rightarrow a \wedge b = 13$

4) $\begin{cases} 7a - 4b = 13 \\ a \wedge b = 13 \\ 1956 \le b \le 2012 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4n + 3 \\ b = 7n + 2 \\ a \wedge b = 13 \\ 1956 < b \le 2012 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 9 + 13k \\ b = 63 + 91k \\ 1893 \le 91k \le 1949 \\ 20,... \le k \le 21,... \end{cases}$

$(a, b) = (1131, 1976)$ $\qquad k = 21 \Rightarrow n = 282$

Exercice 5 :

$f(x) = x^2 - 2\ln x - 1$; $x > 0$

1) f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a $f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2(x^2 - 1)}{x}$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

2) a) $\lambda \in]0, 1]$ $A(\lambda) = \int_\lambda^1 x^2 - 2\ln x - 1\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2x\ln + 2x - x^\lambda\right]_\lambda^1 = \frac{4}{3} - \frac{\lambda^3}{3} + 2\lambda\ln\lambda - \lambda$

b) $\lim_{\lambda \to 0^+} A(\lambda) = \frac{4}{3}$

3) $n \ge 2$

http://mathematiques.kooli.me/

a) $1 \le k \le n-1$ $\quad 0<\frac{k}{n}\le t\le\frac{k+1}{n}\le 1$ *et f décroissante sur]0, 1]*

$$\Rightarrow f\left(\frac{k+1}{n}\right)\le f(t)\le f\left(\frac{k}{n}\right)\Rightarrow \frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right)\le\int_{k/n}^{k+1/n} f(t)dt \le\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

b)
$$\left.\begin{array}{l} k=1\ \frac{1}{n}f\le\left(\frac{2}{1}\right)\int_{1/n}^{2/n} f(t)dt\le\frac{1}{n}f(\frac{1}{n}) \\ k=2\ \frac{1}{n}f\le\left(\frac{3}{n}\right)\int_{2/n}^{3/n} f(t)dt\le\frac{1}{n}f\left(\frac{2}{n}\right) \\ k=n-1\ \frac{1}{n}f(1)\le\int_{\frac{1-1}{n}}^{1} f(t)dt\le\frac{1}{n}f\left(\frac{1-1}{n}\right)\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{1-1}f\left(\frac{k+1}{n}\right)\text{ et }\left(\frac{1}{n}\right)\le\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

4) $S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(k/n)$ $\quad S_n\ge(1/n)$ d'autre part $S_n-\frac{1}{n}f(\frac{1}{n})\le A(1/n)\Rightarrow S_n\le A(1/n)+\frac{1}{n}f(1/n)\Rightarrow\lim_{+\infty}S_n=\frac{4}{3}$

Exercice 5:

1) $F(x)=\int_e^x\frac{dt}{(1+\ln^2 t)}$; $n\ge e$ $\qquad \vartheta=\pi\int_e^{e^{\sqrt3}}\frac{1}{x(1+\ln x)}dx=\pi\times F\left(e^{\sqrt3}\right)$

2) *g(x) = tan x ;* $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

a)

x	*0* $\qquad\qquad$ $\pi/2$
g'(x)	+
g(x)	*0* ↗ $+\infty$

b) *g'(x) ≠ 0* $\quad (g^{-1})'(x)=\frac{1}{g'(g^{-1})(x)}=\frac{1}{1+\tan^2 t}=\frac{1}{1+x^2}$

3) *H(x)* $=\int_1^{\ln x}\frac{dt}{1+t^2}\quad\forall x\ge e$

a) $H(e)=0$; $H\left(e^{\sqrt3}\right)=\int_1^{\sqrt3}\frac{dt}{1+t^2}=g^{-1}\left(\sqrt3\right)-g^{-1}(1)=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$

b)
$$\left\{\begin{array}{l} x\mapsto\ln x \text{ est dérivable sur }[e,+\infty[\\ \frac{1}{1+t^2}\text{ continue sur }IR_+\,;1\in IR_+ \\ \ln\left([e,+\infty[\right)=[1,+\infty[\subset IR_+\end{array}\right.\qquad\Rightarrow H\text{ est dérivable sur }[e,+\infty[$$

et on a $H'(x)=\frac{1}{x}\times\frac{1}{1+\ln^2 x}=\frac{1}{x(1+\ln^2 x)}$

c) *H(x) = F(x)* $\Rightarrow V=\pi\times F\left(e^{\sqrt3}\right)=\pi\times H\left(e^{\sqrt3}\right)=\frac{\pi^2}{12}$

Figure de l'exercice n°2 :

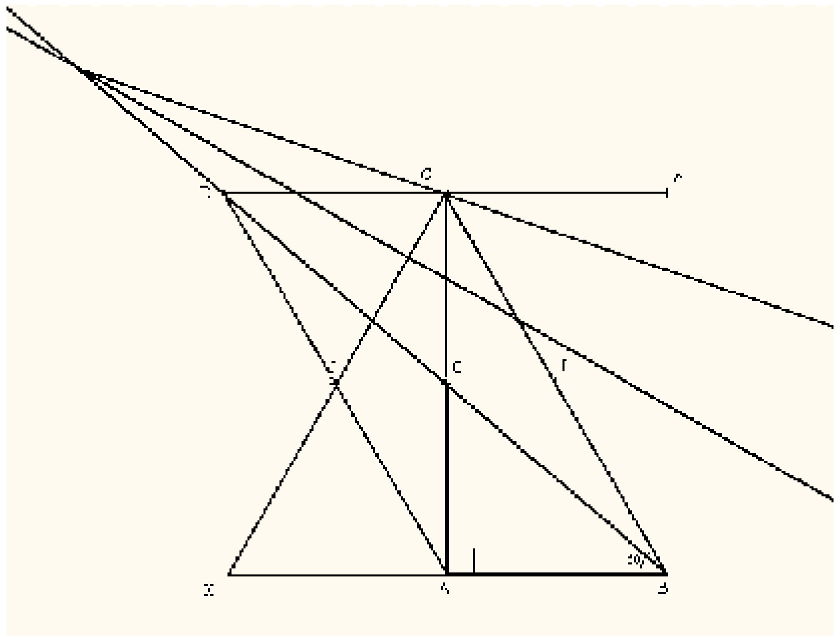

Figure de l'exercice n°4 :