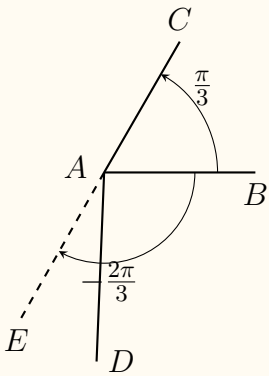


Exercice 1

- 1 L'équation : $3\sqrt{x+2} - x - 1 = 0$ admet au moins une solution α dans l'intervalle : **d** [8.90; 8.91]
- 2 L'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \frac{\sqrt{x-2025}}{E(x)-2025}$ est : **d** $[2026, +\infty[$
- 3 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^3}{\sqrt{x}-1} = \mathbf{d} \quad -6$
- 4 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4(\sqrt{x+4}-2)}{(x-4x^2)} = \mathbf{d} \quad 1$

Exercice 2

- 1
 - Pour $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $\frac{43\pi}{3} = 14\pi + \frac{\pi}{3}$. Donc, la mesure principale de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est : $\frac{\pi}{3}$.
 - Pour $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$: $\frac{55\pi}{6} = 9\pi + \frac{\pi}{6} = 10\pi + \frac{\pi}{6} - \pi = 10\pi - \frac{5\pi}{6}$. Donc, la mesure principale de $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ est : $-\frac{5\pi}{6}$.
- 2 On a : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})[2\pi] \equiv \frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{6}[2\pi] \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.
Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont **orthogonaux**.
- 3 Voir figure
- 4
 - a** : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) \equiv -\frac{2\pi}{3}[2\pi]$ et $AE = 3$ cm. (Voir figure).
 - b** $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}) \equiv (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE})[2\pi] \equiv -\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3}[2\pi] \equiv -\pi[2\pi]$. Donc $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires.
Par suite les points **A, C et E** sont **alignés**.



Exercice 3

- 1
 - a** Voir figure
 - b** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AI} = AI^2 = AB^2 - BI^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}a^2$
 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \times AD \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = a \times \frac{3}{2}a \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}a^2$:
 - c** On a : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AD}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DI} = 0$.
Donc les droites (AB) et (ID) sont perpendiculaires.

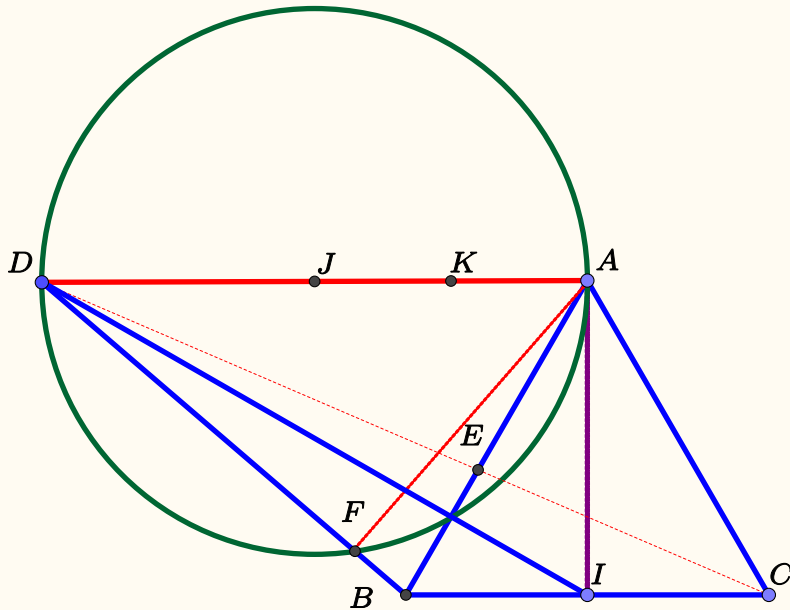
$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{JA}) \cdot (\overrightarrow{BJ} - \overrightarrow{JA}) = BJ^2 - JA^2 = \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow BJ^2 = \frac{a^2}{4} + AJ^2 = \frac{a^2}{4} + \left(\frac{3}{4}a\right)^2 = \frac{13}{16}a^2.$$

Conclusion	$BJ = \frac{\sqrt{13}}{4}a$
------------	-----------------------------

b On a : $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \times AD \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = a^2 + \frac{9}{4}a^2 - 2a \times \frac{3}{2}a \times \frac{1}{2} = \frac{13}{4}a^2 - \frac{6}{4}a^2 = \frac{7}{4}a^2$ d'ou

$$BD = \frac{\sqrt{7}}{2}a$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = BA \times BD \cos(\widehat{ABD}) = \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow a \times \frac{\sqrt{7}}{2} a \cos(\widehat{ABD}) = \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow \cos(\widehat{ABD}) = \frac{1}{2\sqrt{7}}$$



3

$$\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{AE} = 3(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AE} - 3\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{EA} + 3\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{0}.$$

D'où E est barycentre des points pondérés $(A, 1)$ et $(B, 3)$

4 **a** $4\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MD} = 3\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} \Leftrightarrow \overrightarrow{MD} \cdot (4\overrightarrow{ME} - 3\overrightarrow{MB}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MD} \cdot (4\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MA} + \underbrace{4\overrightarrow{AE} - 3\overrightarrow{AB}}_{\overrightarrow{0}}) =$

$0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MA} = 0$. Donc $\overrightarrow{MD} \perp \overrightarrow{MA}$, par suite M décrit le cercle Γ de diamètre $[AD]$

b $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF}) \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} + \underbrace{\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BD}}_0 = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = \frac{a^2}{4}$

$$\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BD} = BF \times BD \cos(0) = \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow BF \times \frac{\sqrt{7}}{2}a = \frac{a^2}{4} \text{ donc } BF = \frac{1}{2\sqrt{7}}a$$

5 $MA^2 - MJ^2 = \frac{3}{16}a^2 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MJ}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MJ}) = \frac{3}{16}a^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{JA} \cdot 2\overrightarrow{MK} = \frac{3}{16}a^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{JA} \cdot \overrightarrow{MK} = \frac{3}{32}a^2$
 $\overrightarrow{JA} \cdot (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BK}) = \frac{3}{32}a^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{JA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{JA} \cdot \overrightarrow{BK} = \frac{3}{32}a^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{JA} \cdot \overrightarrow{MB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BK} = \frac{3}{32}a^2$
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{JA} \cdot \overrightarrow{MB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK}) = \frac{3}{32}a^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{JA} \cdot \overrightarrow{MB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AK} = \frac{3}{32}a^2$
 $\overrightarrow{JA} \cdot \overrightarrow{MB} + \frac{3}{4}a^2 \times \frac{1}{2} - \frac{3}{4}a \times \frac{3}{8}a = \frac{3}{32}a^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{JA} \cdot \overrightarrow{MB} + \frac{3}{8}a^2 - \frac{9}{32}a^2 = \frac{3}{32}a^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{JA} \cdot \overrightarrow{MB} + \frac{3}{32}a^2 = \frac{3}{32}a^2 \Leftrightarrow$
 $\overrightarrow{JA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$. Donc $\overrightarrow{JA} \perp \overrightarrow{MB}$. Par suite M décrit la droite Δ passant par B et perpendiculaire à

(AJ)

- 6 a $MA^2 + 3MB^2 = (\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EA})^2 + 3(\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EB})^2 = 4ME^2 + EA^2 + EB^2 + 2\overrightarrow{ME} \cdot \underbrace{(\overrightarrow{EA} + 3\overrightarrow{EB})}_{\vec{0}} =$
 $4ME^2 + (\frac{3}{4}a)^2 + 3(\frac{a}{4})^2 = 4ME^2 + \frac{9}{16}a^2 + \frac{3}{16}a^2 = 4ME^2 + \frac{3}{4}a^2$
- b $MA^2 + 3MB^2 = \frac{37}{16}a^2 \Leftrightarrow 4ME^2 + \frac{3}{4}a^2 = \frac{37}{16}a^2 \Leftrightarrow 4ME^2 = \frac{25}{16}a^2 \Leftrightarrow ME^2 = \frac{25}{64}a^2 \Leftrightarrow ME = \frac{5}{8}a$.
 Donc M décrit le cercle $\mathcal{C}'$ de centre E et de rayon $R = \frac{5}{8}a$

Exercice 4

- 1 a La fonction f est définie ssi $x^2 + 1 > 0$. Comme $x^2 + 1$ est strictement positif pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit que $D_f = \mathbb{R}$.
- b La fonction f est la composition de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$: la valeur absolue $|x|$ et la fonction racine carrée $\sqrt{x^2 + 1}$. De plus, le dénominateur $\sqrt{x^2 + 1}$ est toujours strictement positif, donc la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ $D_c = \mathbb{R}$.
- 2 On considère la fonction $h(x) = f(x) - \frac{1}{x^2}$. La fonction h est continue sur $[1; 2]$ car f et $\frac{1}{x^2}$ sont continues sur cet intervalle. $h(1) = f(1) - \frac{1}{1^2} \approx -0.292 < 0$ et $h(2) = f(2) - \frac{1}{2^2} \approx 0.348 > 0$.
 Les valeurs de $h(1)$ et $h(2)$ étant de signes opposés, le théorème des valeurs intermédiaires garantit l'existence d'une solution α dans $[1; 2]$. $h(1.1) = -0.08 < 0$ et $h(1.2) = 0.07 > 0$ donc $1.1 < \alpha < 1.2$
- 3 a Sur $\mathbb{R}_+$, on a $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.
 $\forall x \in \mathbb{R}_+$ on a : $x^2 + 1 \geq x^2$ donc $\sqrt{x^2 + 1} \geq \sqrt{x^2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} \geq x \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \Leftrightarrow 1 \geq f(x)$
 donc f est majorée par 1 sur $\mathbb{R}_+$.
- b $\forall x \in \mathbb{R}, (-x) \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = \frac{|-x|}{\sqrt{(-x)^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = f(x)$. Donc, f est une fonction paire.
- c Puisque f est majorée par 1 sur $\mathbb{R}_+$ et que f est paire, f est également majorée par 1 sur $\mathbb{R}$. De plus, $f(x) \geq 0$ pour tout x , donc f est bornée sur $\mathbb{R}$ par 0 et 1. $0 \leq f(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$
- 4 a L'ensemble de définition de g est l'union des ensembles de définition de chaque morceau. La première partie $f(x)$ est définie sur $] -\infty, 0]$, la seconde sur $]0, 4[$ car $\forall x \in]0, 4[, 4x - x^2 \neq 0$, et la troisième sur $]4, +\infty[$ car $x - 4 \neq 0$ et $2x + 8 \geq 0$.
 Ainsi, $D_g =] -\infty, 0] \cup]0, 4[\cup]4, +\infty[= \mathbb{R} \setminus \{4\}$.
- b $\lim_{x \rightarrow 4^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \left(\frac{2\sqrt{x^2 + 9} - x - 6}{4x - x^2} + \frac{2}{5} \right) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{4(x^2 + 9) - (x + 6)^2}{(4x - x^2)(2\sqrt{x^2 + 9} + x + 6)} + \frac{2}{5} =$
 $\lim_{x \rightarrow 4^-} \left(\frac{3x^2 - 12x}{(4x - x^2)(2\sqrt{x^2 + 9} + x + 6)} + \frac{2}{5} \right) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \left(\frac{-3(4x - x^2)}{(4x - x^2)(2\sqrt{x^2 + 9} + x + 6)} + \frac{2}{5} \right) =$
 $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{-3}{2\sqrt{x^2 + 9} + x + 6} + \frac{2}{5} = -\frac{3}{20} + \frac{2}{5} = \frac{1}{4}$.
- $\lim_{x \rightarrow 4^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{\sqrt{2x + 8} - 4}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{2x - 8}{(x - 4)(\sqrt{2x + 8} + 4)} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{2}{\sqrt{2x + 8} + 4} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.
- c On a $D_g = \mathbb{R} \setminus \{4\}$ et $\lim_{x \rightarrow 4^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} g(x) = \frac{1}{4}$, alors g est prolongeable par continuité en 4.