Lycée secondaire K S Prof : A.Kinen	**Devoir de synthèse n°1** 6/12/2008	4^{eme}sc-exp1 Durée : 2 heures

Exercice1 (5points)

Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2}(1+x^2)}$

1)
   a. Montrer que f est dérivable sur ℝ et déterminer $f'(x)$
   b. Montrer que pout tout $x \in [0,1]$ on a $|f'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$

2) Soit (U_n) la suite définie sur ℕ par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$
   a. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$;$0 \leq U_n \leq 1$
   b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $|U_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}|U_n - 1|$
   c. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $|U_n - 1| \leq (\frac{1}{\sqrt{2}})^n$
   d. Déterminer alors $\lim_{n\to+\infty} U_n$

Exercice2 (6points)

On suppose dans tout l'exercice que $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

1)
   a. Résoudre dans ℂ l'équation $z^2 - z + 1 = 0$
   b. Donner les solutions sous forme exponentielle.
2) Soit l'équation $E_\theta : z^2 - 2sin\theta z + 1 = 0$
   a. Résoudre dans ℂ l'équation E_θ.
   b. Mettre les solutions sous forme exponentielle.
3) On pose $f(z) = z^3 + (1-2sin\theta)z^2 + (1-2sin\theta)z + 1$
   a. Vérifier que -1 est une solution de l'équation $f(z) = 0$
   b. Résoudre dans ℂ l'équation $f(z) = 0$

4)Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{u}, \vec{v})$on désigne par A,M et N les points d'affixes respectives : -1, $sin\theta + icos\theta$ $et\ sin\theta - icos\theta$

a. Montrer que les points A,M et N appartiennent a un cercle ($\boldsymbol{C}$) que l'on précisera.
b. Vérifier que AMN est isocèle de sommet principal A
c. Déterminer le réel θ pour que AMN soit équilatéral.

Exercice 3 (6points)

I. Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x} \quad si\ x \neq 0$ Et $f(0) = 0$.

Montrer que :

1) f est continue en 0
2) f est dérivable en 0
3) f' n'est pas continue en 0

II. soit g la fonction définie sur $[\frac{2}{\pi}, \frac{4}{\pi}]$par $g(x) = \sin\frac{1}{\text{x}}$

1) Montrer que g est dérivable sur $[\frac{2}{\pi}, \frac{4}{\pi}]$et calculer$g'(x)$.
2) Montrer que $|g'(t)| \leq \frac{\pi^2}{4}$ pour tout $t \in [\frac{2}{\pi}, \frac{4}{\pi}]$
3) En déduire que $\left|\sin\frac{1}{x} - 1\right| \leq \frac{x\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2}$ pour tout $x \in [\frac{2}{\pi}, \frac{4}{\pi}]$

Exercice4 (3points) nom -prénom :……………………………………………

I. Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse (une réponse non justifiée ne rapporte aucun point)

1. L'ensemble (E)des points M d'affixe z différente de 1 du plan telle que $\left|\frac{z}{1-z}\right| = 1$ est une droite parallèle à l'axe des réels
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

2. Soit f une fonction dérivable sur [-2,2] et f' est continue sur [-2,2] dont le tableau de variation de f' est :

x	-2	-1	0	1	2
f'					

Dans un repère orthogonal ;la courbe de f admet exactement deux tangentes parallèles à la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x$
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

II.

Pour chaque question une seule des 3 propositions est exacte.

(Aucune justification n'est demandée)

1. Soit f une fonction dérivable sur [-1,2] telle que $1 \leq f'(t) \leq 3$ alors on

a ☐ $1 \leq f(2) - f(-1) \leq 3$

☐ $3 \leq f(2) - f(-1) \leq 9$

☐ $-3 \leq f(2) - f(-1) \leq -1$

2. La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + sin^2x}$ est dérivable sue $]0, +\infty[$ et sa dérivée

est :

☐ $\frac{x+sinx}{\sqrt{x^2+sin^2x}}$

☐ $\frac{x+cosxsinx}{\sqrt{x^2+sin^2x}}$

☐ $\frac{2x+2sinx}{\sqrt{x^2+sin^2x}}$