

Lycée :Ennozha Zaghouan	<u>Devoir de synthèse N°1</u>	Epreuve :Mathématiques
Année scolaire : 2011/2012		Professeur : KHEMIRI Fawzi
Durée :2heures		Classe : 4 ^{ème} Sc-exp2

Exercice1 (5points)

Les réponses aux questions de cet exercice seront données sans aucune justification.

A) Vrai ou Faux ? Répondre par vrai ou faux à chacune des propositions suivantes :

1/ $2ie^{-i\frac{\pi}{12}}$ est une racine cubique de $-4\sqrt{2}(1+i)$

2/ Soit l'équation (E) : $2z^2 - (2+i)z + (\sqrt{3}+i) = 0$ dont les solutions sont notées z_1 et z_2 .
 $Arg(z_1) + Arg(z_2) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$.

3/ Les solutions de l'équation : $(1+i)z^2 - (1+2i)z + (1+i) = 0$ sont $(1-i)$ et $\frac{1+i}{2}$.

B) O.C.M Pour chacun de énoncés suivants une seule affirmation est exacte. Attribuer la lettre qui désigne le choix au numéro de l'énoncé .

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par : $f(x) = x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$.

1/ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ est égale à : a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) π
 2/ $\forall x > 0$; $f'(x)$ est égale à : a) $\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$ b) $\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) - \frac{\pi}{x} \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$ c) $-\frac{\pi}{x^2} \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$.

Exercice2 (2points)

Soit la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = \sqrt{x}$

1/ Montrer que pour tout réel $x \in [10000, 10001]$; $\frac{1}{2\sqrt{10001}} \leq g'(x) \leq \frac{1}{200}$

2/ En déduire un encadrement d'amplitude 10^{-3} de $\sqrt{10001}$. (indication : utiliser les inégalités des accroissements finis)

Exercice3 (6points)

Soit f la fonction définie sur $] -\infty, 0]$ par : $f(x) = \begin{cases} x\sqrt{1-\frac{2}{x}} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé .

1/ a) Montrer que f est continue à gauche en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 0 et interpréter graphiquement le résultat.

2/ a) Montrer que pour tout réel $x < 0$, on a : $f'(x) = \frac{1-x}{\sqrt{x^2-2x}}$

b) Dresser alors le tableau de variation de f .

3/a) Montrer que pour tout réel $x < 0$, $f(x) - x = \frac{-2}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1}$

b) En déduire que la droite $\Delta: y = x - 1$ est une asymptote à la courbe (C) en $-\infty$.

c) Etudier la position relative de (C) et Δ .

d) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)-x+1}$

Exercice4 (7points)

Pour tout nombre complexe z , on définit : $P(z) = z^3 + 2(\sqrt{2} - 1)z^2 + 4(1 - \sqrt{2})z - 8$

1/ a) Calculer $P(2)$.

b) Déterminer le nombre complexe b tel que : $P(z) = (z - 2)(z^2 + bz + 4)$.

2/ Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E): $P(z) = 0$. On appelle z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E) autres que 2, z_1 ayant la partie imaginaire positive.

a) Vérifier que $z_1 + z_2 = -2\sqrt{2}$.

b) Donner la forme exponentielle de z_1 et de z_2 .

3/ a) Placer dans le plan, muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) (unité graphique : 2 cm), les points A, B et C d'affixes respectives 2 ; z_1 et z_2 et le point I milieu de [AB].

b) Démontrer que le triangle OAB est isocèle. En déduire une mesure de l'angle (\vec{u}, \vec{OI})

c) Donner la forme algébrique de l'affixe z_1 de I, puis le module de z_1

d) Déduire des résultats précédents les valeurs exactes de $\cos \frac{3\pi}{8}$ et $\sin \frac{3\pi}{8}$