Lycée : Souassi

***

DEVOIR DE SYNTHESE N° 1

***

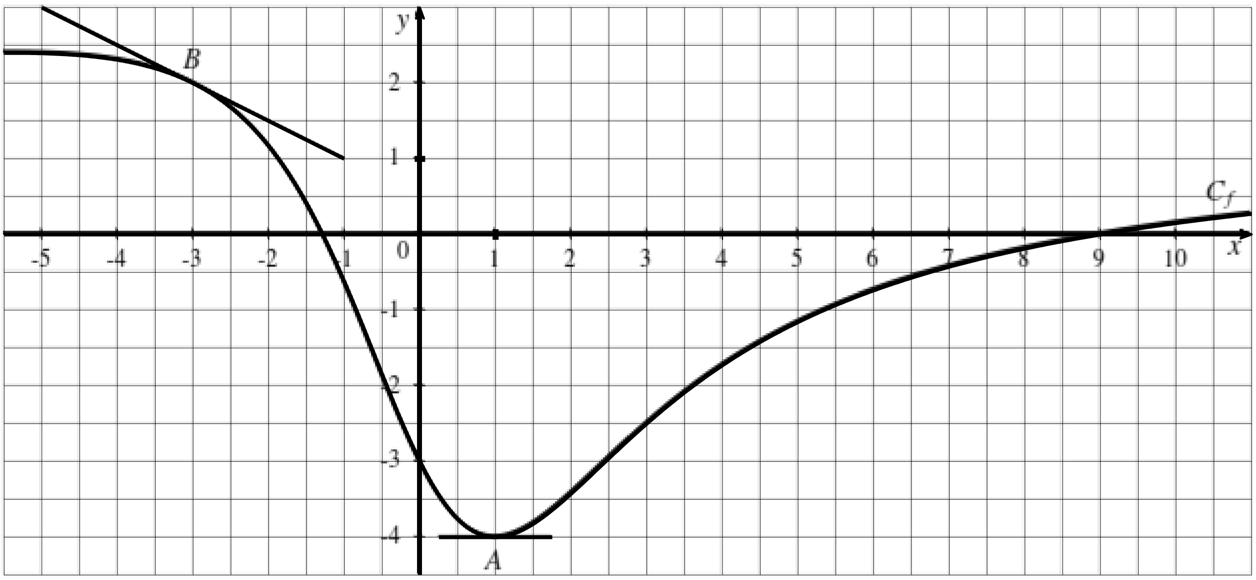
07/12/2011

SECTIONS : 4éme *Sciences Expérimentales* **2**
EPREUVE : *Mathématiques*
DUREE : 2 *heures*
PROFESSEUR : *Mr Wissem Fligène*

<u>Exercice 1</u> : (4 pts)

La courbe C_f ci-dessous représente une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. On sait que :

- $f'(0) = -2$.
- La courbe admet au point A d'abscisse 1 une tangente parallèle à l'axe des abscisses.



1. À partir du graphique et des renseignements fournis, déterminer :
   a) $f'(1)$ et $f'(-3)$.
   b) Une équation de la tangente T à la courbe au point d'abscisse 0.
2. En déduire :
   a) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h+1)+4}{h}$ et $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{f(x)-2}{x+3}$
   b) Le point de coordonnées $(1, -5)$ appartient-il à la tangente T ?

<u>Exercice 2</u> : (6 pts)

On définit les suites (a_n) et (b_n) par $a_0 = 1$, $b_0 = 7$ et $\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{3}(2a_n + b_n) \\ b_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + 2b_n) \end{cases}$

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = b_n - a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   a) Démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b) Exprimer u_n en fonction de n.
2. Comparer a_n et b_n. Etudier le sens de variation des suites (a_n) et (b_n).
3. Démontrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
4. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = a_n + b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Démontrer que (v_n) est une suite constante.
5. Justifier que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes et calculer leur limite.

Exercice 3 : (4 pts)

1) Déterminer les racines cubiques de l'unité et donner les résultats sous forme algébrique
2) a) Calculer $(2+i)^3$

   b) En déduire les solutions de l'équation : $z^3 = 2+11i$

Exercice 4 : (6 pts)

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\frac{1}{2}z^2 - (1+2i)z - 3 = 0$.
2) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E): z^3 - 4(1+i)z^2 + 2(-1+4i)z + 12 = 0$.
   a) Vérifier que 2 est une racine de (E).
   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation(E).
3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2$; $z_B = 3+3i$ et $z_C = -1+i$.
   a) Placer sur une figure les points A, B et C.
   b) Montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle et isocèle.
4) Soit $\theta \in]0, \pi[$ et l'équation $(E_\theta): z^2 - 2z + 1 - e^{i2\theta} = 0$
   a) Résoudre(E_θ). On notera z_1 et z_2 les solutions avec $Im(z_1) < 0$.
   b) Déterminer les formes exponentielles de z_1 et z_2.
   c) Déterminer l'ensemble (F) des points $M(z_1)$ lorsque θ décrit $]0, \pi[$.