Première année 1 et 2 — Le Mardi 06/12/2011.

- DEVOIR DE SYNTHÈSE N°1-

∼ Durée : 1 heure et 30 minutes ∼

Exercice 01 — 2 Pts

☞ **L'élève indique sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse correcte**

1. Soient x et y deux réels tels que $x \leq y$ et $a = 3x - 5y$ et $b = x - 3y$. Alors
   (a) $a \geq b$. (b) $a = b$. (c) $a \leq b$.
2. On donne $\mathfrak{A} = \sqrt{\frac{3^2+4^2}{169}}$. Alors
   (a) $\mathfrak{A} = \frac{5}{13}$. (b) $\mathfrak{A} = \frac{7}{13}$. (c) $\mathfrak{A} = \sqrt{\frac{5}{13}}$. (d) $\mathfrak{A} = \sqrt{\frac{7}{13}}$.

Exercice 02 — 5 Pts

1. (a) Vérifier que pour tout réels non nuls x et y, on a : $\frac{3}{4}(x+y)^2 + \frac{1}{4}(x-y)^2 = x^2 + xy + y^2$.
   (b) En déduire que $x - y$ et $x^3 - y^3$ sont de même signe.
2. (a) Utiliser l'égalité précédante pour développer : $\mathfrak{B} = \frac{3}{4}(2x+3)^2 + \frac{1}{4}(2x-3)^2$. $(x \in \mathbb{R})$.
   (b) Factoriser $\mathfrak{C} = 8x^3 - 27$.
   (c) Vérifier que $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}} = 2x - 3$.
   (d) En déduire que si $(x = 1 - \sqrt{2})$ alors $(|\mathfrak{B} \times \mathfrak{C}| + \mathfrak{B} \times \mathfrak{C} = 0)$.

Exercice 03 — 6 Pts

On considère les deux intervalles $\mathcal{I} =]0, 1[$ et $\mathcal{J} = \left[-2, \frac{2}{5}\right]$.

1. Déterminer les ensembles suivants $\mathcal{I} \cap \mathcal{J}$ et $\mathcal{I} \cup \mathcal{J}$.
2. Donner un intervalle $\mathcal{H}$ semi-ouvert à droite tel que $\mathcal{H} \subset \mathcal{J}$ et $\mathcal{H} \cap \mathcal{I} = \phi$.
3. Soit $x \in \mathcal{I}$ et $y \in \mathcal{J}$.
   (a) Encadrer $x + 2$, $x^2 + 2$ et $x - y$.
   (b) Comparer x^2 et x puis déduire une comparaison de $\frac{1}{x+2}$ et $\frac{1}{x^2+2}$.
   (c) Vérifier que $x + 4 \neq 0$ puis encadrer $\frac{2x-3}{x+4}$.

Exercice 04 — 7 Pts

Soit $ABCD$ un parallèlogramme de centre O tel que $AB = 4,5$ cm. La parallèle à la droite (AC) passant par B coupe la droite (CD) en E. La droite (AE) coupe (BC) en F et coupe (BD) en K.

1. (a) Comparer $\frac{KB}{KD}$ et $\frac{KF}{KA}$ puis $\frac{KB}{KD}$ et $\frac{KA}{KE}$.
   (b) En déduire que $KA^2 = KE \times KF$.
2. (a) Montrer que F est le milieu du segment $[BC]$.
   (b) Que représente le point K pour le triangle ABC.
3. La droite (OF) coupe la droite (BE) en I.
   (a) Construire le point H du segment $[BE]$ tel que $BH = \frac{2}{3}BI$.
   (b) Montrer que les deux droites (HK) et (OI) sont parallèles, puis calculer HK.