Lycée 2 Mars Ksar - Hellal Prof : Mandhouj .M	**Devoir de contrôle n° 1** Durée : 2 Heures	$4^{eme}M_2$ Le 14/11/2010

Exercice1(6pts)

Soit f la fonction définie sur IR par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2+1} + x^3 & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = \cos(x^2) & \text{si } x > 0 \end{cases}$

1) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.
2) Etudier la continuité de f en 0.
3) a/ Etudier la dérivabilité de f en 0.
   b/Justifier que f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ et calculer $f'(x)$ sur chacun de ces intervalles.
4) Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet au moins une solution α dans $[-1,0]$

Exercice2 (5pts)

I. Pour tout entier naturel $k \geq 1$, on définit la fonction $f_k : IR^+ \to IR$

$$x \mapsto \frac{x^k}{\sqrt{x^2+1}}$$

Démontrer que f_k est strictement croissante sur IR^+.

II. Soit la suite (u_n) définie sur IN par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2}{\sqrt{u_n^2+1}} \end{cases}$

1) Montrer par récurrence que :
   a) (u_n) est strictement décroissante.
   b) $\forall n \in IN : 0 < u_n < 1$
2) En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.
3) a)Montrer que $\forall n \in IN : 0 < u_{n+1} < \frac{u_n}{\sqrt{2}}$
   b) Retrouver alors la limite de la suite (u_n).

Exercice3(5pts)

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + (2 - i)z - 2i = 0$.
2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, On considère les ponts A(-2) et B(i).
   À tout complexe $z \neq -2$ on associe le complexe Z défini par $Z = \frac{z-i}{z+2}$
   a) Déterminer l'ensemble E_1 des points M d'affixe z tels que $|Z| = 1$
   b) Déterminer l'ensemble E_2 des points M d'affixe z tels que Z soit un réel négatif
   c) Déterminer l'ensemble E_3 des points M d'affixe z tels que $\arg(Z) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$

Exercice4(4pts)

1) a/ Donner la forme exponentielle du complexe $4\sqrt{2}(-1+i)$.
   b/ Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^3 = 4\sqrt{2}(-1+i)$.
2) Soit $\theta \in]0.2\pi[$. Montrer que : $\frac{2z-1}{z} = 2e^{i\theta} \Leftrightarrow z = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} i \cot an\left(\frac{\theta}{2}\right)$
3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(2z-1)^3 = 4\sqrt{2}(-1+i) z^3$.

Fin