REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION
EXAMEN DU BACCALAUREAT
SESSION DE JUIN 2008

NOUVEAU REGIME
SESSION PRINCIPALE

SECTION :	MATHEMATIQUES		
EPREUVE :	MATHEMATIQUES	DUREE : 4 h	COEFFICIENT : 4

Le sujet comporte 3 pages numérotées de 1/3 à 3/3. La page 3/3 est à rendre avec la copie.

Exercice n°1 (3 points)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse correcte vaut 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse vaut 0 point.

1) La limite de ($x+1+e^{-x}$) quand x tend vers $-\infty$ est égale à
a) $-\infty$. b) 0. c) $+\infty$.

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - 1$.
Alors f est une solution de l'équation différentielle
a) $2y' = y + 2$. b) $y' = 2y + 2$. c) $y' = -2y - 2$.

3) La durée de vie X, exprimée en années, d'une machine automatique suit une loi exponentielle de paramètre 0,4.
La probabilité que la machine ne tombe pas en panne avant 10 ans est égale à
a) e^{-4}. b) $1 - 0{,}4e^{-4}$. c) $1 - e^{-4}$.

Exercice n° 2 (5 points)

1) Dans l'annexe ci-jointe (Figure 1 page 3), on a représenté dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe $(\mathscr{C})$ de la fonction f définie sur $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ par $f(x) = \ln^3(x) - 3\ln x$ et les demi- tangentes à la courbe $(\mathscr{C})$ aux points d'abscisses respectives $\frac{1}{e}$ et e.

a) En utilisant le graphique :
Montrer que f réalise une bijection de $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ sur $[-2, 2]$. (On note f^{-1} la fonction réciproque de f et $(\mathscr{C}')$ la courbe représentative de f^{-1} dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$).

b) Tracer la courbe $(\mathscr{C}')$ et les demi-tangentes à $(\mathscr{C}')$ aux points d'abscisses respectives -2 et 2.

2) Soit la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ définie par $a_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$.

a) Calculer a_1.
b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier $n \geq 1$; $a_{n+1} = e - (n+1)\, a_n$.
c) En déduire que $a_3 = 6 - 2e$.

3) Soit $\mathscr{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathscr{C}')$ et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 0$.

a) Calculer $\int_1^e f(x)dx$.

b) En déduire $\mathscr{A}$.

Exercice n°3 (4 points)

1) Soit dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $3x-8y=5$.
Montrer que les solutions de (E) sont les couples (x, y) tels que $x=8k-1$ et $y=3k-1$ avec $k\in\mathbb{Z}$

2) a) Soit n, x et y trois entiers tels que

$$\begin{cases} n=3x+2 \\ n=8y+7 \end{cases}$$

Montrer que (x, y) est une solution de (E).

b) On considère le système $(S)\begin{cases} n\equiv 2 \pmod 3 \\ n\equiv 7 \pmod 8 \end{cases}$ où n est un entier .

Montrer que n est solution du système (S) si et seulement si $n\equiv 23 \pmod{24}$.

3) a) Soit k un entier naturel.

Déterminer le reste de 2^{2k} modulo 3 et le reste de 7^{2k} modulo 8.

b) Vérifier que 1991 est une solution de (S) et montrer que l'entier $(1991)^{2008}-1$ est divisible par 24.

Exercice n°4 (4 points)

Le plan est orienté dans le sens direct.
Dans l'annexe ci-jointe (Figure 2 page 3), OAB est un triangle rectangle isocèle tel que
OA = OB et $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

On désigne par I le milieu du segment [AB] et par C et D les symétriques respectifs du point I par rapport à O et à B.

Soit f la similitude directe qui envoie A sur D et O sur C.

1) Montrer que f est de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
2) a) Montrer que O est l'orthocentre du triangle ACD.
b) Soit J le projeté orthogonal du point O sur (AC).
Déterminer les images des droites (OJ) et (AJ) par f et en déduire que J est le centre de la similitude f.
3) Soit g la similitude indirecte de centre I, qui envoie A sur D .
a) Vérifier que g est de rapport 2 et d'axe (IC). En déduire g(O).
b) Déterminer les images de C et D par gof^{-1}. En déduire la nature de gof^{-1}.
4) Soit $I'=f(I)$ et $J'=g(J)$
a) Déterminer les images des points J et I' par gof^{-1} .
b) Montrer que les droites (I J), (I' J') et (CD) sont concourantes.

Exercice n°5 (4 points)

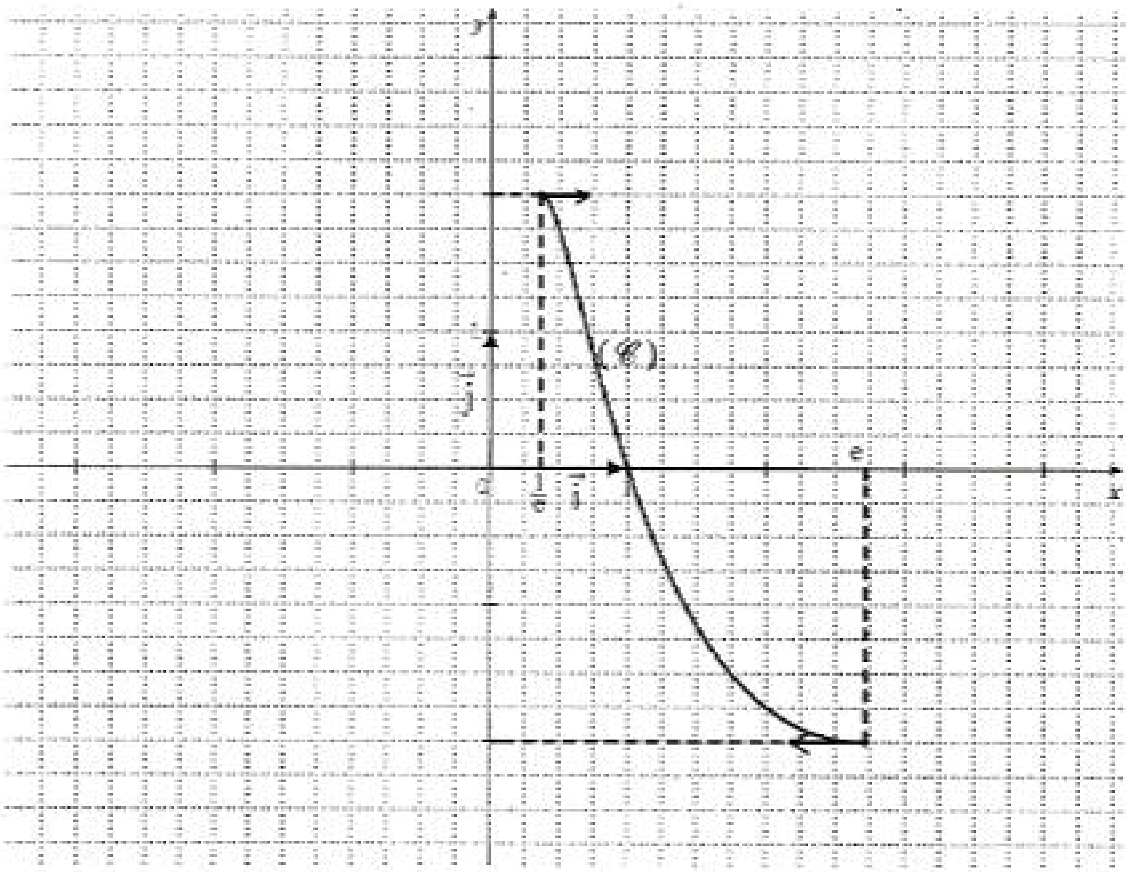
L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère le tétraèdre ABCE tel que A(1, 0, 2) , B(0, 0, 1) , C(0, -1, 3) et $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

1) a) Vérifier que E a pour coordonnées (0, 2, 3).
b) Calculer le volume du tétraèdre ABCE .
2) a) Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation : $x-2y-z+5=0$. Montrer que $\mathscr{P}$ est parallèle au plan (ABC) .
b) Soit K le point défini par $2\overrightarrow{KE}+\overrightarrow{KC}=\vec{0}$. Calculer les coordonnées du point K et vérifier que K appartient au plan $\mathscr{P}$.
3) Soit h l'homothétie de centre E qui transforme le point C en K .
a) Déterminer le rapport de h .
b) Le plan $\mathscr{P}$ coupe les arêtes [EA] et [EB] respectivement en I et J .
Calculer le volume du tétraèdre EIJK .

Exercice 2

Figure 1



Exercice 4

Figure 2