RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION	EXAMEN DU BACCALAURÉAT SESSION 2022	Session de contrôle
	Épreuve : **Mathématiques**	Section : **Sciences Techniques**
	Durée : **3h**	Coefficient de l'épreuve: **3**

N° d'inscription

Le sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

Les pages 4/5 et 5/5 sont à rendre avec la copie.

Exercice 1 : (5,5 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on donne les points $A(1,2,1)$, $B(1,0,-1)$ et $C(3,2,1)$.

1) a) Déterminer $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$. En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) Soit P le plan passant par A, B et C.

Montrer qu'une équation de P est $y-z-1=0$.

2) a) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$. En déduire que le triangle ABC est rectangle en A.

b) Soit I le milieu du segment $[BC]$. Vérifier que $I(2,1,0)$.

3) On considère dans l'espace l'ensemble S des points $M(x,y,z)$ tels que $x^2+y^2+z^2-4x-2y+2=0$.

a) Montrer que S est la sphère de centre I et de rayon $\sqrt{3}$.

b) Soit (ζ) le cercle du plan P de centre I et de rayon $\sqrt{3}$.

Montrer que P coupe S suivant (ζ).

c) Montrer que le cercle (ζ) est circonscrit au triangle ABC.

4) On considère la droite $\Delta:\begin{cases}x=2\\y=-\alpha+1\\z=\alpha\end{cases}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

a) Montrer que Δ est perpendiculaire à P en I.

b) Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. On note $M_\alpha(2,\ 1-\alpha,\ \alpha)$ un point de Δ. Montrer que $d(M_\alpha,P)=\sqrt{2}|\alpha|$.

c) Pour $\alpha\neq 0$, on note V_α le volume du tétraèdre $ABCM_\alpha$.

Montrer que $V_\alpha=\frac{4}{3}|\alpha|$.

d) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles $V_\alpha=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

e) Montrer que, pour les valeurs de α trouvées dans la question précédente, $M_\alpha\in S$.

Exercice 2 : (4 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1) a) Vérifier que $(2\sqrt{3}+2i)^2 = 8+8i\sqrt{3}$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2i\sqrt{3}z - 5 - 2i\sqrt{3} = 0$.

2) On considère les points E, F et G d'affixes respectives :

$z_E = 1$; $z_F = \sqrt{3} + i(1+\sqrt{3})$ et $z_G = -\sqrt{3} + i(-1+\sqrt{3})$.

a) Vérifier que $z_G - 1 = i(z_F - 1)$.

b) En déduire que le triangle EFG est rectangle et isocèle en E.

c) Déterminer l'affixe du point H milieu du segment $[FG]$.

d) Justifier que la droite (EH) est la médiatrice du segment $[FG]$.

3) a) Montrer que le point H appartient au cercle (ζ) de centre E et de rayon 2.

b) **Dans la figure 1 de l'annexe jointe,** on a tracé le cercle (ζ). Construire le point H.

4) Soit (ζ') le cercle de centre H et de rayon 2.

a) Montrer que (ζ') est le cercle circonscrit au triangle EFG.

b) Construire les points F et G.

Exercice 3 : (4 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = \dfrac{3}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{\sqrt{3u_n^2+4}}{2}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

1) a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 2$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}^2 - u_n^2 = \dfrac{4-u_n^2}{4}$.

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

2) Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n^2 - 4$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{3}{4}$.

b) Exprimer v_n en fonction de n.

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{4 - \dfrac{7}{4} \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^n}$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k^2$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = -7 \times \left(1 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1}\right) + 4(n+1)$, puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{n}$.

Exercice 4 : (6,5 points)

1) On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = x^2 + 2 - 2\ln x$.

On donne le tableau de signe de la fonction dérivée g' de g.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

a) Donner le sens de variation de g sur $]0,+\infty[$.

b) Calculer $g(1)$. En déduire que pour tout x de $]0,+\infty[$, $g(x) > 0$.

2) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x + \dfrac{2\ln x}{x}$, on note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

a) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

d) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0,+\infty[$ une solution unique notée α.

e) Vérifier que $0,7 < \alpha < 0,8$.

3) a) Montrer que la droite $\Delta : y = x$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

b) Etudier la position relative de la courbe (C) et la droite Δ.

4) a) Soit T la tangente à (C) au point $A(e, f(e))$.

Donner une équation de T et vérifier que $T // \Delta$.

b) Vérifier que pour tout x de $]0,+\infty[$, $f(x) - (x + \dfrac{2}{e}) = \dfrac{2}{x}(e\ln x - x)$.

c) Soit h la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $h(x) = e\ln x - x$.

Etudier le sens de variation de h et calculer $h(e)$.

d) Déduire que (C) est au-dessous de T.

5) **Dans la figure 2 de l'annexe jointe**, on a tracé la droite Δ et on a placé le point A.

Tracer T et (C).

6) Pour λ un réel strictement positif, on note $I(\lambda)$ l'aire du domaine D_λ du plan limité par la courbe (C), la droite Δ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \lambda$.

a) Montrer que pour tout λ strictement positif, $I(\lambda) = (\ln \lambda)^2$.

b) Montrer que pour tout λ strictement positif, $I(\lambda) = I(\dfrac{1}{\lambda})$.

c) Pour quelles valeurs de λ l'aire du domaine D_λ est égale à 2 ?

Section : ..... N° d'inscription : ..... Série : .....

Nom et Prénom : .....

Date et lieu de naissance : .....

Signatures des surveillants

.....

.....

Épreuve: Mathématiques - Section : Sciences Techniques
Session de contrôle (2022)
Annexe à rendre avec la copie
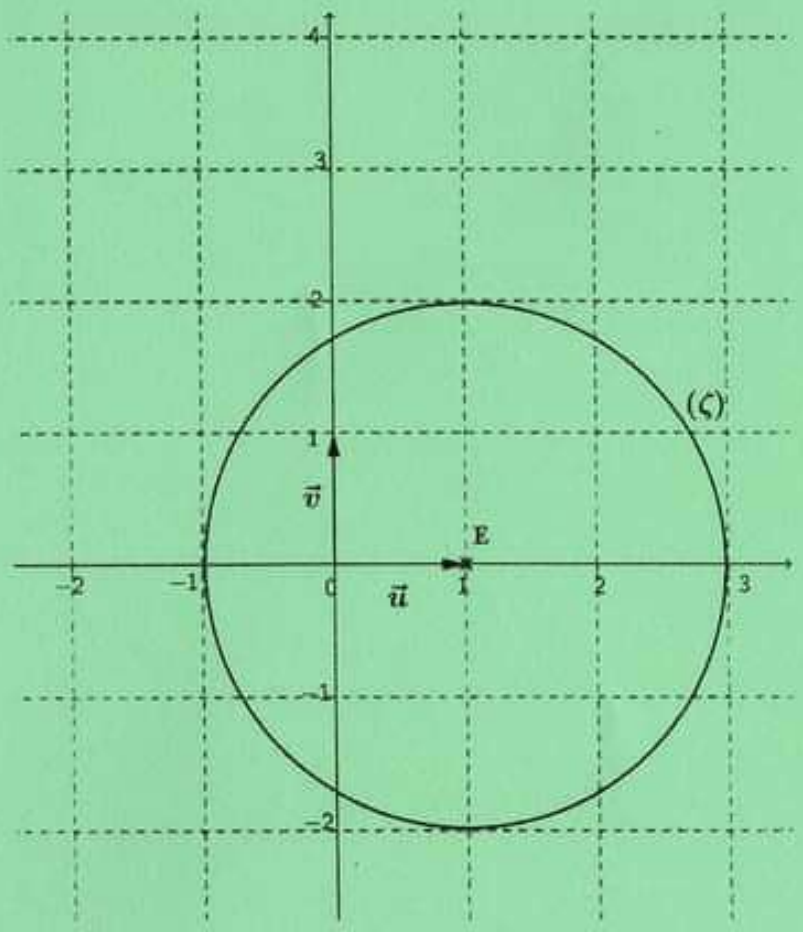
Figure 1 :