

RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION	EXAMEN DU BACCALAURÉAT	Session principale 2023
	Épreuve : <b>Mathématiques</b>	Section : <b>Sciences expérimentales</b>
	Durée : <b>3h</b>	Coefficient de l'épreuve: <b>3</b>

N° d'inscription



Le sujet comporte 5 pages. Les pages 4/5 et 5/5 sont à rendre avec la copie.

### Exercice 1 (4 points)

Une étude statistique montre que dans une ville, 10% des personnes pubères sont atteintes par une maladie M.

On choisit au hasard un couple marié dans cette ville et on désigne par :

- A l'événement : « le mari est atteint par la maladie M »,
- B l'événement : « l'épouse est atteinte par la maladie M ».

**On admet que les événements A et B sont indépendants.**

- Déterminer  $p(A \cap B)$  et  $p(A \cup B)$ .
- On considère les événements suivants :
  - $M_0$  : « Aucun des deux conjoints n'est atteint par la maladie M »,
  - $M_1$  : « Un seul conjoint est atteint par la maladie M »,
  - $M_2$  : « Le mari et son épouse sont atteints par la maladie M ».

Justifier que  $p(M_2) = 0.01$ ,  $p(M_0) = 0.81$  et  $p(M_1) = 0.18$ .

- Ce couple vient d'avoir un nouveau-né.
 

On note E l'événement : « Le nouveau-né est atteint par la maladie M ».

L'étude montre que la probabilité qu'un nouveau-né soit atteint par la maladie M est égale à :

  - 0.02 si aucun de ses parents n'est atteint par la maladie M,
  - 0.1 si un seul de ses parents est atteint par la maladie M,
  - 0.25 si ses deux parents sont atteints par la maladie M.
  - Déterminer  $p(E \cap M_2)$ ,  $p(E \cap M_0)$  et  $p(E \cap M_1)$ .
  - En déduire que  $p(E) = 0.0367$ .
  - Calculer la probabilité qu'aucun des parents n'est atteint par la maladie M sachant que leur nouveau-né est atteint. On donnera le résultat arrondi à  $10^{-4}$ .
- On choisit au hasard n nouveaux nés dans cette ville, où n est un entier supérieur ou égal à 2. On note X la variable aléatoire égale au nombre de nouveaux nés atteints par la maladie M, parmi les n nouveaux nés choisis. **On suppose que X suit une loi binomiale.**
  - Déterminer les paramètres de X.
  - Déterminer la probabilité  $p_n$  qu'aucun des nouveaux nés ne soit atteint par la maladie M.
  - Déterminer la plus grande valeur de n pour que  $p_n \geq 0.75$ .



## Exercice 2 (5.5 points)

On considère dans  $\mathbb{C}$ , l'équation (E) :  $z^2 + (1 - 3i\sqrt{3})z - 8 = 0$ .

- A/ 1. a) Montrer que le discriminant  $\Delta$  de l'équation (E) est égal à  $(3 - i\sqrt{3})^2$ .  
b) Résoudre l'équation (E).

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

Dans la figure 1 de l'annexe, les points I et A sont d'affixes respectives 1 et  $a = 1 + i\sqrt{3}$ .

2. a) Vérifier que  $a = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$  puis écrire  $\frac{1}{a}$  et  $a^2$  sous forme exponentielle.  
b) Construire dans la figure 1, les points B et C d'affixes respectives  $\frac{1}{a}$  et  $a^2$ .

B/ Dans la figure 1 de l'annexe, M est un point de la droite (IA) d'affixe  $z$  et distinct de I.

On désigne par N, P et P' les points d'affixes respectives  $z^2$ ,  $\frac{1}{z}$  et  $\bar{z}$ .

1. Justifier que  $\operatorname{Re}(z) = 1$ .

Dans la suite, on pose  $z = 1 + ib$ , où  $b$  est un réel non nul.

2. a) Montrer que les droites (MN) et (OM) sont perpendiculaires.  
b) Vérifier que  $\operatorname{Im}(z^2) = 2 \operatorname{Im}(z)$ .  
c) Construire alors le point N.  
3. a) Montrer que les points O, P et P' sont alignés.  
b) Justifier que les points I et P sont distincts.  
c) Montrer que le point P appartient au cercle de diamètre [OI].  
d) Construire alors le point P.

## Exercice 3 (3.5 points)

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on pose  $u_n = \int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{\ln x}{x} dx$  et  $v_n = \int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{\ln x}{x\sqrt{1+x}} dx$ .

1. a) Montrer que  $u_n = \frac{1}{2} \ln^2 \left( 1 + \frac{1}{n} \right)$ .  
b) Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  et montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 u_n = \frac{1}{2}$ .  
2. a) Montrer que  $\sqrt{\frac{n}{2n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ , pour tout réel  $x$  tel que  $1 \leq x \leq 1 + \frac{1}{n}$ .  
b) En déduire que  $\sqrt{\frac{n}{2n+1}} \times u_n \leq v_n \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \times u_n$ .  
c) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 v_n$ .

### Exercice 4 (7 points)

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (x+1)e^{-x} + x$ .

On désigne par  $(\zeta)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

I) 1. Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et montrer que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ . Interpréter graphiquement.

2. a) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

b) Montrer que la droite  $(D): y = x$  est une asymptote à la courbe  $(\zeta)$  au voisinage de  $+\infty$ .

c) Etudier la position relative de  $(\zeta)$  et  $(D)$ .

II) Dans la figure 2 de l'annexe,  $(\Gamma)$  est la courbe de la fonction  $f'$  dérivée de  $f$ .

La courbe  $(\Gamma)$  admet une unique tangente horizontale au point  $F\left(1, 1 - \frac{1}{e}\right)$ .

1. a) En utilisant le graphique, justifier que  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

b) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

c) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet dans  $\mathbb{R}$  une unique solution  $\alpha$ .

Vérifier que  $\alpha \in ]-0.7, -0.6[$ .

2. a) Soit  $f''$  la fonction dérivée seconde de  $f$ .

Utiliser le graphique pour déterminer  $f''(1)$  et le signe de  $f''(x)$ .

b) Soit le point  $E(1, f(1))$ .

Montrer que  $E$  est un point d'inflexion de  $(\zeta)$ .

3. Soit  $(T)$  la tangente à  $(\zeta)$  au point  $E$ .

a) Montrer qu'une équation de  $(T)$  est  $y = \left(1 - \frac{1}{e}\right)x + \frac{3}{e}$ .

b) Vérifier que le point  $G(3, 3)$  appartient à  $(T)$ .

c) Justifier que  $\overline{OF}$  est un vecteur directeur de  $(T)$ .

d) Construire dans la figure 2 la tangente  $(T)$  puis placer le point  $E$ .

4. a) Vérifier que le point  $J(0, 1)$  appartient à  $(\zeta) \cap (\Gamma)$ .

b) Tracer la courbe  $(\zeta)$ .

5. Soit  $\mathcal{A}$  l'aire (en u.a) de la partie du plan limitée par l'axe des ordonnées, la droite d'équation  $x = -1$  et les courbes  $(\zeta)$  et  $(\Gamma)$ .

a) Montrer que  $\int_{-1}^0 (x+1)e^{-x} dx = e - 2$ .

b) Calculer  $\mathcal{A}$ .



Section : ..... N° d'inscription : ..... Série : .....

Nom et Prénom : .....

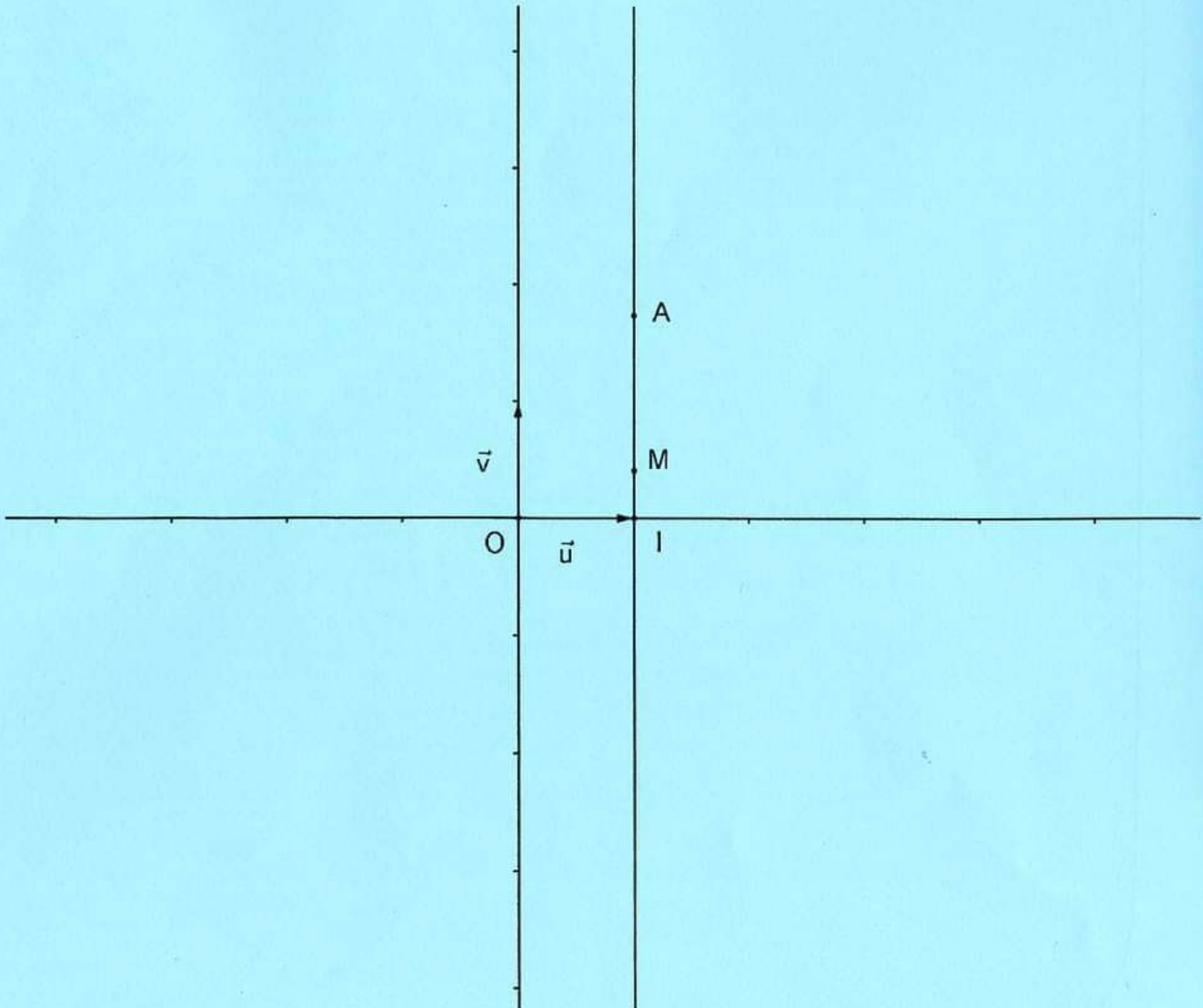
Date et lieu de naissance : .....

Signatures des surveillants  
.....  
.....



**Épreuve: Mathématiques - Section : Sciences expérimentales**  
**Session principale (2023)**  
**Annexe à rendre avec la copie**

Figure 1



Ne rien écrire ici

Figure 2

