

<b>RÉPUBLIQUE TUNISIENNE</b>  <b>MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION</b>	<b>EXAMEN DU BACCALAURÉAT</b> <b>SESSION 2022</b>	<b>Session de contrôle</b>
	Épreuve : <b>Mathématiques</b>	Section : <b>Sciences expérimentales</b>
	Durée : <b>3h</b>	Coefficient de l'épreuve: <b>3</b>

N° d'inscription



Le sujet comporte 3 pages numérotées de 1/3 à 3/3.

### Exercice 1 (4 points)

Le tableau ci-dessous, donne pour les années indiquées, la production de lait cru en Tunisie.

On considère la série statistique  $(I, P)$ , où  $I$  est le rang de l'année et  $P$  est la production annuelle de lait cru en millions de litres.

Année	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
$I = \text{rang}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P = \text{production}$ annuelle de lait cru (en millions de litres)	1014	1030	1059	1096	1124	1175	1218	1376	1428	1424

Source HAL open science

- Calculer le coefficient de corrélation de la série statistique  $(I, P)$ . Interpréter le résultat.
- Donner l'équation de la droite de régression de  $P$  en  $I$ .
- Estimer la production, en millions de litres, de lait cru en 2023.
  - A partir de quelle année la production de lait cru dépassera-t-elle 1800 millions de litres ?
  - On prévoit que la population tunisienne atteindra 12,5 millions d'habitants en 2024 et qu'en moyenne, un tunisien consomme 135 litres de lait cru par an.

La production de lait cru répondra-t-elle au besoin de la Tunisie en 2024 ?

## Exercice 2 (4 points)

Une urne contient quatre boules rouges et six boules noires, indiscernables au toucher.

*Une épreuve consiste à tirer simultanément trois boules de l'urne.*

1. On considère l'événement  $A$  : « Obtenir une seule boule rouge ».

Montrer que  $P(A) = 0.5$ , où  $P(A)$  est la probabilité de  $A$ .

2. Calculer la probabilité de l'événement  $B$  : « Obtenir aucune boule rouge ».

3. On répète l'épreuve précédente  $n$  fois de suite,  $n \geq 2$ , en remettant à chaque fois les boules tirées dans l'urne.

On désigne par  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'on a obtenu une seule boule rouge.

a) Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .

b) Exprimer en fonction de  $n$  l'espérance mathématique de  $X$ , ainsi que sa variance.

## Exercice 3 (5 points)

1. On considère dans  $\mathbb{C}$  l'équation (E) :  $z^2 - 2(1+i)e^{i\frac{\pi}{6}}z + 4ie^{i\frac{\pi}{3}} = 0$ .

a) Vérifier que  $2e^{i\frac{\pi}{6}}$  est une solution de l'équation (E).

b) En déduire l'autre solution de (E) et la mettre sous forme exponentielle.

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les points

$A$ ,  $B$ , et  $C$  d'affixes respectives  $z_A = \sqrt{3} + i$  ;  $z_B = -1 + i\sqrt{3}$  et  $z_C = 2$ .

On désigne par  $H$  le point d'affixe  $z_H = z_A + z_B + z_C$ .

a) Montrer que les points  $A$  et  $B$  appartiennent au cercle  $(\zeta)$  de centre  $O$  et de rayon 2.

b) Construire les points  $A$  et  $B$  dans le repère  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

3. a) Ecrire  $\frac{z_B + z_C}{z_C - z_B}$  sous forme cartésienne.

b) Montrer que les droites  $(AH)$  et  $(BC)$  sont perpendiculaires.

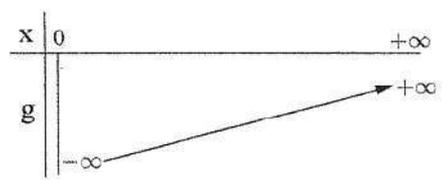
c) Montrer que  $z_H = \sqrt{2}(1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{4}}$ .

d) Construire alors le point  $H$ .

### Exercice 4 (7 points)

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = x \ln x - \frac{1}{2} \ln^2 x$ .

On désigne par  $(\zeta)$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. a) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ . Interpréter le résultat.  
 b) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .  
 c) Montrer que la courbe  $(\zeta)$  admet, au voisinage de  $(+\infty)$ , une branche parabolique de direction  $(O, \vec{j})$ .
2. a) Montrer que pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $f'(x) = 1 + \frac{(x-1)\ln x}{x}$ .  
 b) Montrer que pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $(x-1)\ln x \geq 0$ .  
 c) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
3. Montrer que la tangente  $(T)$  à la courbe  $(\zeta)$  au point d'abscisse 1 a pour équation  $y = x - 1$ .
4. On pose pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $g(x) = f(x) - x + 1$ .  
 On donne ci-contre le tableau de variation de  $g$ .  
  
 a) Calculer  $g(1)$  et en déduire le signe de  $g(x)$  pour tout  $x > 0$ .  
 b) En déduire que le point  $A(1, 0)$  est un point d'inflexion de la courbe  $(\zeta)$ .  
 c) Montrer que l'équation  $g(x) = 1$  admet dans  $]0, +\infty[$  une unique solution  $\alpha$  et que  $\alpha \in ]3,3; 3,4[$ .
5. Soit  $\Delta$  la droite d'équation  $y = x$ .  
 a) Montrer que la droite  $\Delta$  coupe la courbe  $(\zeta)$  uniquement au point d'abscisse  $\alpha$ .  
 b) Tracer la tangente  $(T)$ , la droite  $\Delta$  et la courbe  $(\zeta)$  dans  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .
6. a) Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $]0, +\infty[$  sur  $\mathbb{R}$ .  
 On note  $f^{-1}$  la fonction réciproque de  $f$ , on désigne par  $(\Gamma)$  sa courbe représentative dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .  
 b) Tracer la courbe  $(\Gamma)$ .
7. Soit  $\mathcal{A}$  l'aire de la partie du plan limitée par la courbe  $(\Gamma)$  et les droites d'équations  $y = 1$ ,  $y = e$  et  $x = 0$ .  
 a) Montrer que  $\int_1^e x \ln x \, dx = \frac{e^2 + 1}{4}$ .  
 b) Montrer que la fonction  $u$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $u(x) = x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x$  est une primitive de la fonction  $x \mapsto \ln^2 x$ .  
 c) Montrer alors que  $\mathcal{A} = \frac{e^2 - 2e + 5}{4}$ .