RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION	EXAMEN DU BACCALAURÉAT	Session principale	2024
	Épreuve : **Mathématiques**	Section : **Sciences Techniques**	
	Durée : **3h**	Coefficient de l'épreuve: **3**	

N° d'inscription

Le sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5. **La page 5/5 est à rendre avec la copie.**

Exercice 1 (4 points) :

1) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $e^{i\frac{\pi}{4}}z^2 - \left(i + e^{i\frac{\pi}{4}}\right)z + i = 0$.

   a) Vérifier que 1 est une solution de l'équation (E).

   b) En déduire l'autre solution de (E) et la mettre sous forme exponentielle.

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1$, $z_B = e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_C = 2e^{i\frac{\pi}{4}} - i$.

   a) Ecrire $1 + i$ sous forme exponentielle.

   b) Vérifier que $z_C - z_A = \left(2 - \sqrt{2}\right)z_B$.

   En déduire que les droites (AC) et (OB) sont parallèles.

3) a) Montrer que $i\left(z_B - z_C\right) = \overline{z_B - z_A}$.

   b) En déduire que le triangle ABC est isocèle en B .

4) Dans la **figure 1** de l'annexe ci-jointe, on a placé le point A et on a construit le cercle ζ de centre O et de rayon 1.

   a) Vérifier que le point B appartient au cercle ζ. Construire le point B .

   b) Soit T la tangente à ζ en B .

   Montrer que T est la médiatrice du segment $[AC]$.

   c) Construire alors sur la **figure 1** le point C .

Exercice 2 (5 points) :

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On donne les points $A\left(1,3,1\right)$, $B\left(-1,1,1\right)$, $C\left(1,2,0\right)$ et $I\left(1,1,1\right)$.

1) a) Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b) En déduire que les points A , B et C déterminent un plan P dont une équation cartésienne est $x - y + z + 1 = 0$.

c) Vérifier que le point $H\left(\frac{1}{3},\frac{5}{3},\frac{1}{3}\right)$ est le projeté orthogonal du point I sur le plan P.

2) Soit S l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 1 = 0.$$

a) Montrer que S est la sphère de centre I et de rayon $R = 2$.

b) Vérifier que les points A et B appartiennent à S.

c) Montrer que le plan P coupe la sphère S suivant un cercle $\mathscr{C}$ que l'on caractérisera.

d) Montrer que la droite $\left(AB\right)$ coupe le cercle $\mathscr{C}$ en A et B.

3) On considère le plan $Q : z - 1 = 0$.

a) Montrer que P et Q sont sécants suivant la droite $\left(AB\right)$.

b) Soit le point $E\left(1,1,3\right)$. Vérifier que E appartient à S.

c) Soit $M\left(x,y,z\right)$ un point de l'espace.

Montrer que : $\overrightarrow{IE}.\overrightarrow{IM} = 0$ si et seulement si M appartient à Q.

4) Déterminer l'ensemble des points M du plan P tels que le triangle IME soit rectangle et isocèle en I.

Exercice 3 (4.5 points) :

On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{2U_n} \text{ , pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < U_n \leq 2$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1}^2 - U_n^2 = U_n(2 - U_n)$.

En déduire que la suite (U_n) est croissante.

c) Montrer que la suite (U_n) est convergente et que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 2$.

2) On considère la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \ln 2 - \ln U_n$.

Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ dont on précisera le premier terme.

3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = V_0 + V_1 + \ldots\ldots + V_{n-1}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = 2\ln 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$.

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

c) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\ln 2 - \frac{S_n}{n}} = 2$.

Exercice 4 (6.5 points) :

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = (\ln(x) - 1)^2$.

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

c) Vérifier que pour tout $x > 0$, $\frac{f(x)}{x} = \left(\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$ puis montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

Interpréter graphiquement les résultats.

2) a) Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{2\left(\ln(x) - 1\right)}{x}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3) Soit g la fonction définie sur $\left]0, +\infty\right[$ par :

$$g(x) = f(x) - x .$$

On donne ci-contre le tableau de variation de g.

x	0		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

a) Calculer $g(1)$ puis déterminer le signe de $g(x)$ sur $\left]0, +\infty\right[$.

b) En déduire la position relative de la courbe $\left(C_f\right)$ par rapport à la droite $\Delta : y = x$.

4) Dans la **figure** 2 de l'annexe ci-jointe, on a tracé dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ la droite Δ et on a placé le point $E(e, 0)$.

Tracer la courbe $\left(C_f\right)$ dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

5) Soit h la restriction de f à l'intervalle $\left]0, e\right]$.

a) Montrer que h réalise une bijection de $\left]0, e\right]$ sur $\left[0, +\infty\right[$.

On note h^{-1} la fonction réciproque de h et on désigne par $\left(\Gamma\right)$ sa courbe représentative dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

b) Tracer sur la **figure** 2 la courbe $\left(\Gamma\right)$.

6) a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_1^e f(x)dx = -1 - \int_1^e xf'(x)dx$.

b) Montrer que $\int_1^e xf'(x)dx = 2\left(2 - e\right)$.

c) Déduire l'aire $\mathcal{A}$, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe $\left(\Gamma\right)$ et les droites d'équations $y = 1$, $x = 0$ et $x = 1$.

Section : .... N° d'inscription : .... Série :	Signatures des surveillants
Nom et Prénom :	....
Date et lieu de naissance :	....

Épreuve: Mathématiques - Section : Sciences Techniques
Session principale (2024)
Annexe à rendre avec la copie

Figure 1

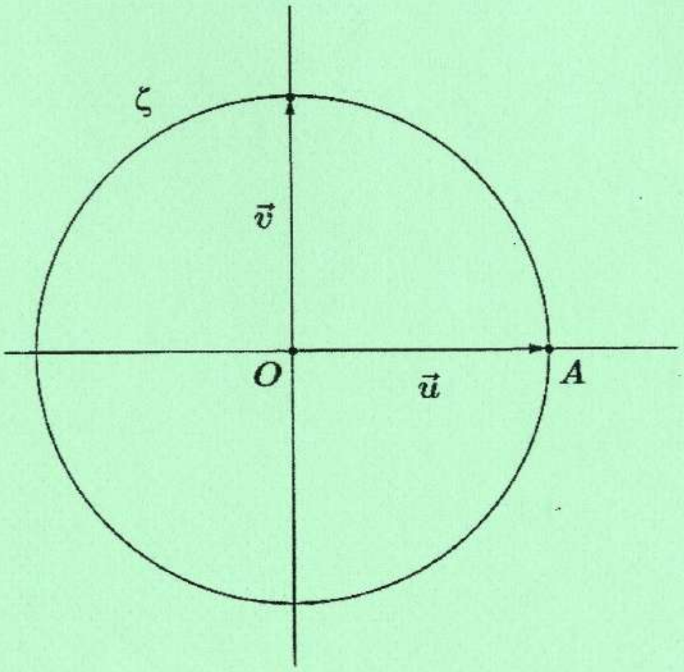

Figure 2